

# منعك الرياضيات

تأليف  
د. و. شوبير

دمي صبي

\*\* معرفتي \*\*

www.ibtesama.com

منتديات مجلة الإنسامة

ترجمه

دكتور عطية عبد السلام عاشور  
دكتور ادوارد ميناخائيل ابراهيم

راجعه

دكتور محمد مرسى احمد







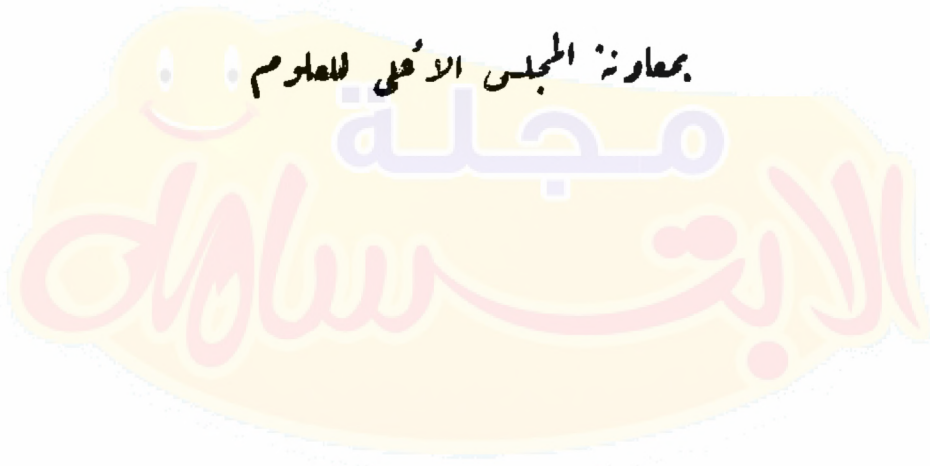
متعة الرياضيات

الابتسام



نصرة هذه الساحة

بمعاونة المجلس الأعلى للعلوم





الإلف كتاب

# متعة الرياضی

تألیف  
و.و. سوير

ترجمه

الدكتور عطية عاشور      الدكتور إدوارد مينخايل

راجعه

الدكتور محمد مرسي أحمد

الثا

دار سعد مضر  
للطباعة والنشر



هذه ترجمة كتاب :

Mathematician's Delight

By

W. W. Sawyre.



الجزء الأول

الطريق إلى الرياضيات

الابتسام

# الباب الأول

## الفرع من الرياضيات

« الخوف أعظم المرور »  
من الفلسفة الأبيقراطية

إن الهدف الرئيسى لهذا الكتاب هو تبديد الخوف من الرياضيات إذ رأى السائد عند الكثيرين أن الرياضيين سلالة من البشر خصها الله بقوى خارقة للطبيعة ، وهذا رأى مع ما فيه من إطراء للرياضى الناجح يقف عقبة أمام من تضطره ظروف الحياة إلى تعلم الرياضة .

ويتملك كثيراً من الطلاب شعور بالمجز التام عن فهم الرياضيات ، ولما كنهم مع ذلك يحاولون أن يتعلموا منها القدر الذى يكفى لخداع الممتحنين ، ومشاهم فى هذا مثل الرسول يطلب منه أن يعيد كلاما بلغة يجهلها تمام الجهل ، كل هممه أن يؤدى الرسالة قبل أن تخونه الذاكرة فيقع فى أفسس الأخطاء .

ومثل هذه الدراسة مضيعة للوقت ، فالرياضة أداة لا فائدة من الاستحواذ عليها إذا لم يكن الغرض من ذلك استخدامها . ولعل



الأفضل في هذه الحالة صرف الوقت والجهد في تمارين الرياضة البدنية ففيها على الأقل فائدة لصحة الأجسام .

ثم إنه من أكبر العيوب أن يقف الإنسان جباناً خائراً أمام مجال من مجالات الحياة . والمثل الأعلى للصحة العقلية أن يكون الإنسان معداً لمواجهة مشكلات الحياة أيأ كان نوعها لا أن يسلم قدميه للريح محولاً نظره بعيداً عن مواطن الصعوبات .

ويتساءل المرء لم هذا الشعور بالخوف من الرياضيات ؟ أمرد ذلك إلى طبيعة العلم ذاته ؟ أم مرده إلى أن الرياضيين يختلفون عن سائر البشر ؟ أم مرده إلى عيب في الطريقة التي نتعلم بها هذا العلم ؟

ويكاد يكون من المحقق أن السبب لا يرجع إلى طبيعة الموضوع ذاته ، وأكبر دليل على ذلك أن الناس في معادلاتهم اليومية يفكرون بطريقة هي في أساسها ذات الطريقة الرياضية ولكنهم لا يدركون ذلك ، ويهلعون لو أن أحداً أشار عليهم بدراسة شيء من الرياضة ، والأمثلة على هذا كثيرة وسنوردها في مكان آخر من هذا الكتاب .

ولقد أصبح الخوف من الرياضة من التقاليد التي ورثناها عن تلك الأيام التي لم يكن المعلم فيها يعرف إلا القليل عن الطبيعة

البشرية وبالتالي لم يكن يعرف شيئاً البتة عن طبيعة الرياضة ذاتها وما كان يلقنه هو شيء زائف ليس من الرياضة في شيء .

### التقليد الأعمى :

يكاد يكون لكل شيء ، ما يمكن أن نسميه ظلاً أو محاكاة أو تقليداً لهذا الشيء ، فأغلب الظن أنك تستطيع أن تعلم الطفل الآبكم الأصم كيف يلعب البيانو ، وكلنا أخطأ في الإيقاع ولمح وجه مدرسه العابس ، أعاد محاولته مرة أخرى ، ولكنه لا يدرك معنى لما يقوم به ، ولا هو بمدرك أيضاً لم يكرس المرء الساعات الطويلة لمثل هذه التدريبات العجيبة فهو يتعلم تقليداً للموسيقى ، وينظر إلى البيانو بذلك الخوف الذي ينظر به أغلب التلاميذ إلى الرياضة .

وما يقال عن الموسيقى يمكن قوله أيضاً عن غيرها من الموضوعات ، فالتاريخ التقليدي بملوكه وتاريخ وقائعه يمكن أن يتعلمه الإنسان دون أن يعي الدوافع وراء ذلك كله ، والتقليد في الأدب يتمثل فيما يكتب من تعليقات لا حصر لها على كلام شكسبير مما يعصف بكل ملكة لتذوق أدب شكسبير ، ولنضرب لذلك مثلاً : طالبان من طلبة الحقوق أخذ أولهما يحفظ عن ظهر قلب ما لا حصر له من النصوص ، أما الثاني فتخيل نفسه فلاحاً

له زوجة وعمال وأخذ يربط كل شيء بهذه الأسرة . فإذا كان عليه أن يعد وصية فهو لا ينسى أن يوفر لزوجته الضمان الكافي في هذه الوصية ، فالأول يعيش في عالم من الكلمات التي تكاد أن تكون بلا معنى والآخر يعيش في عالم الواقع الملموس .

وخطر تعلمك الشيء دون أن تعيه يتمثل في سخافة قول الطفل « البطن يحوى المعدة والأمعاء وهي أ ، هـ ، ي ، و ، هـ ، ما هي يا ترى الصورة التي رسمها الطفل في ذهنه عندما قال بهذا ؟ هل تصور حروفاً معدنية كبيرة في الأمعاء ؟ أم هو لم يرسم لذلك صورة ما ؟ ولعله قد سمع من معلمه كثيراً من العبارات التي لا تعنى شيئاً فلم ير في قوله إن الأمعاء هي أ ، هـ ، ي ، و ، هـ أى غموض . وكثير من أسئلة الامتحانات فيها من الأخطاء الرياضية ما يعد في سخافة المثل السابق والسبب هو نفس السبب ؛ الكلمات التي لا توحى بصورة معينة ، وعدم التفكير الواقعي .

وهذا الخطر لا معدى عنه في كل تعلم دون وعى كالبيغاء ، فالطفل الأصم يلعب البيانو ولا يدرك ما يقع فيه من خطأ ، والتعلم الواقعي يجعل السخافة غير ممكنة ، وهذا أقل ما فيه من منافع ، وأهم من ذلك أنه يوفر الجهد الذي لا طائل تحته ويشعر بالأمان والثقة الذهنية ، وإنه لمن الأسر أن تتعلم الشيء الحقيقي تعليماً صحيحاً من أن تتعلم التقليد تعليماً خاطئاً ، فضلاً عن أن تعلم



الموضوع الحقيقي فيه تشويق ولذة . وطالما كنت تشعر بالملل من تعلم موضوع ما فكن على يقين من أنك لا تلجّه من بابّه الصحيح ، وجميع الكشوف والأعمال العظيمة إنما جاءت على أيدي أناس أحبوا عملهم وهؤلاء الناس هم من البشر الطبيعيين ولم يكونوا ذوي قدرات خارقة ، فهذا هو إديسون وجد نفسه مضطراً لإجراء التجارب بذات الطريقة التي يعبت بها باقي أقرانه بالدراجات البخارية أو أجهزة اللاسلكي .

وهذا واضح بالنسبة إلى كبار العلماء أو كبار المهندسين أو المكتشفين ، وهو صحيح أيضاً بالنسبة لباقي الموضوعات .

ولكي تجيد أمراً ما يجب أن تبذل مجهوداً . يستوى الأمر في ذلك بالنسبة للعبة كرة القدم أو لنظرية النسبية . ولكن يجب ألا يكون ذلك المجهود مملاً أو مهيناً . وواجب المعلم الأول أن يجعل موضوعه شائقاً . والحق أن الطفل الذي يترك المدرسة في العاشرة ، دون أن يعي من التفاصيل أكثر من روعة الموسيقى ولذة القراءة ، وحب الاستكشاف ، لخير من الشاب الذي يترك الجامعة في الثانية والعشرين من عمره بعد أن يكون قد برم بجميع المعلومات الجافة فعزف عن البحث في هذه المجالات التي تبدو ولا حياة فيها ، ويجب أن نقدم لكل موضوع بما يبين الفائدة

المرجوة من دراسته ، كما يجب أن نمهّد لكل خطوة نخطوها فيه بما يشوق إليها ويجعلها تستحق الدرس والبحث .

ويكاد يكون من المحقق أن سوء التدريس هو السبب الأول في كراهية الموضوعات ووصفها بأنها عالية أو صعبة الفهم . إن الأطفال بطبيعتهم يتوقون إلى تعلم الأشياء وإلى أداء الأعمال ، ومهمة المعلم لا أن يبعث الحياة فيهم فالحياة موجودة تنتظر المجال لتنشط وإنما مهمته أن يحافظ على هذه الحيوية وأن يوجهها .

ويسير التعليم في الغالب الأعم ، مع الأسف ، على فلسفة أن يتعلم الكبار الأعمال الجامدة التي لا حياة فيها وأن على الأطفال أن يعودوا أنفسهم على هذه الأعمال الجامدة ، ونتيجة كل هذا أن يشب المتعلمون على كراهية جميع أنواع التعليم وألوان الثقافة العالية ، ولهم العذر في ذلك .

والحق أن عدداً كبيراً من المشتغلين بمهنة التعليم ثأرون على هذا الجمود في طريقة التدريس ، وقد استخدمت طرق ممتازة للتدريس سمعها الناس عن طريق الإذاعة . هذه الطرق الممتازة كان لها صدى في كثير من أنحاء البلاد فطبقت وطورت بمجهودات فردية ، ومن ثمّ فما جاء في هذا الكتاب من آراء لا ننفردها فيه بالأصالة وإنما هو تعبير لما أحس به كثيرون غيرنا .

وسأحاول في فصول هذا الكتاب أن أبين مفهوم الرياضة

وكيف يفكر الرياضيون ، ومتى يمكن استخدام الرياضة ، ولا يوسع مجال هذا الكتاب لآى تفصيل بل سنكتفى بالإجمال ، وعلى القارئ الذى يرغب فى دراسة أى موضوع أن يرجع إلى ما كتب عنه فى الكتب الدراسية ، ولكن هذه الكتب محشوة بالمعلومات التى لا يظهر الهدف فيها واضحاً ، وليس مما ينفع أن نثقل ذاكرة القارئ بمثل هذه المعلومات المهدومة الهدف . فإننا لو فعلنا لسكننا كمن يضع فى يده ، طريقة هى من ضخامة الكتلة بحيث لا يمكنه رفعها . فالرياضة مجموعة من الأدوات ، وقبل دراسة كل واحدة من هذه الأدوات تفصيلاً عليك أن تتعرف على الغرض من كل منها ، كيف تستخدم ومتى تستخدم وفيما تستخدم .

**\*\* معرفتي \*\***  
**www.ibtesama.com**  
**منتديات مجلة الإبتسامة**



## الباب الثاني

### الهندسة — علم الأثاث والجدران

« وهكذا انكب الدكتور على عمله بنشاط متجدد ، انكب على إقليدس واللغة اللاتينية وعلى القواعد اللغوية والكسور . وتمكن بما أوتي من ذاكرة أن يفهم قواعد اللغة ، وكذلك الكسور لم تكن باللغة الصعوبة ، ولكن إقليدس كان محاولة باللغة الصعوبة . لم يستطع أن يعرف الغرض من الهندسة على الإطلاق . أخذ يسير سيراً لا بأس به إلى أن وصل لنهاية الكتاب الأول ، ولكن عندما أتى إلى نظريات متوازي الأضلاع كما اعتدنا تسميتها ، ( لعن الله أجدادها ! ) عندما أتى إليها سقط صريعاً . لقد استمر مساءً بأكمله صابراً يحاول مع إحدى هذه النظريات إلى أن اتجه إلى نحو حـ ١ وتبادلاً الأيدي وأخذاً يرقصان ويدوران في رأسه الثائرة . جاء وقت النوم ولكن أنى له الراحة ! من الذى يستطيع النوم وهذا المتوازي الأضلاع الطويل السيئ الأخلاق ؟ يقف بين أغطية السرير ويصبح بصوت عالٍ يكفى لإبعاد النوم عن المنزل ، إنه لم يحدث قطعاً من قبل ، وإن يكون فى المستقبل مساوياً للربع السمين الضاحك حـ ١ ،

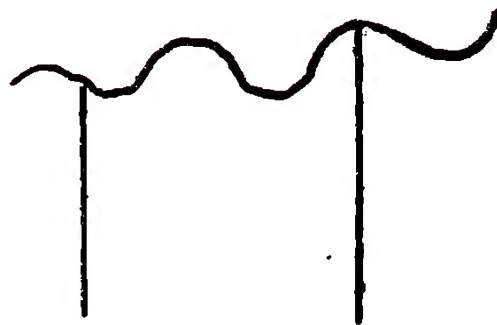
هنرى كنجسلى ، جيوفرى هاملين

فى الباب السابق ذكرنا أن الناس فى حياتهم اليومية يستخدمون نفس الطرق الجدلية التى يستخدمها الرياضيون ولكنهم لا يشعرون بذلك .



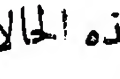
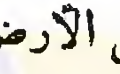
فمثلا ، كثير من الناس الذين سيقفون مشدوهين إذا قلت لهم « اشرح لى من فضلك التصميم الهندسى للمستطيل » لن يجدوا أية صعوبة على الإطلاق إذا أنت قلت « من فضلك قل لى عن طريقة جيدة لعمل نضد » . المستطيل يعنى الشكل المرسوم فيما يلى :



وان يستطيع أحد أن يصل إلى شىء بالنسبة للنضد إلا إذا فهم جيداً ماهية هذا الشكل . افرض مثلاً أن لديك نضداً شكلها كالاتى :



فإن جميع الصحون وأوانى الشاى وأوعية اللبن الموضوعة

عليها ستزلق أسفل المنخفضات أو تقع ، ويكون النضد في مجمله غير مناسب وغير عملي . ويجمع الناس الذين يقومون بصنع النضد على أنه يجب أن تكون ذات سطح مستوٍ لا منحني . وحتى إذا كان السطح الأعلى مستوياً فقد لا يكون أفقياً ، قد تبدو النضد بالهيئة  وإذا كان السطح الأعلى مصنوعاً بطريقة صحيحة فإن الأرجل قد تبدو غريبة مثل  أو  في مثل هذه الحالات سيعمل وزن الجزء الأعلى من النضد على كسر المفاصل ، ولتجنب ذلك تصنع الأرجل عادة رأسية وتوجد النضد على الأرض على الهيئة .

وأى شخص يفهم شكل النضد يعرف ما هو المستطيل . ستجد الكثير عن المستطيلات في كتب الهندسة لأن هذا الشكل ذو أهمية بالغة في الحياة الواقعية ، وذلك بالرغم من أن الكتب الأقدم ليس فيها إشارة عن السبب الذى من أجله ندرس المستطيلات .

وحرفة أخرى تستخدم المستطيلات هي حرفة البناء . الطوب العادية لها مستطيل من أعلى ومن أسفل ، ومن كل من الجانبين وفى النهايتين . لماذا ؟ من السهل تخمين الإجابة . يجب وضع الطوب بحيث تكون أحرفه رأسية وإلا فإنه ينزلق . ( وحتى عند بناء الحوائط من الحجر غير المستوى ، كما هو الحال بالنسبة

لحوائط يوركشير الجافة نحاول أن نبني بطبقات مستوية ) .  
وذلك حتى يأخذ الطوب مكانه بين خطين أفقيين . ولكن لا يزال  
في الإمكان مع ذلك أن توجد أشكال غريبة للنهايتين .



ولكن هذا يشبه ألعاب الأطفال أكثر مما يشبه الحائط : إن  
البناء المسكين سينفق نصف حياته في البحث عن الطوب المناسب .  
نحن نرغب في أن يكون لجميع الطوب نفس الشكل وهذا يمكن  
القيام به بطرق متعددة : //////// أو )))))) . وهذه  
ستجعل نهاية الحائط غير منتظمة . وإذا تقابل حائطان ستوجد  
فراغات يجب ملؤها . بأخذ الشكل المعتاد للطوبة نتجنب جميع  
هذه التعقيدات .

لن يجد إنسان صعوبة في هذا الكلام . لماذا إذن لا يجب  
الناس الهندسة ؟

أولا لأنها في حكم السر الغامض بالنسبة لهم ، فهم لا يعرفون  
( ولم يعرفهم أحد ) مدى التصاقها بحياتهم اليومية .  
وثانياً لأنه يفترض في الرياضيين الكمال . لا يوجد في كتاب  
الهندسة شيء عن أشكال هي «مثلثات تقريبية» أو أشكال «تكد»،



تكون مستطيلات ، بينما من المألوف أن يكون النضد أو الباب منحرفاً قليلاً عن أن يكون مستطيلاً . هذا الكمال يجعل الناس يحجمون . يمكنك أن تحاول مرات عديدة صنع نضد ، وكل محاولة ستكون تحسناً لما قبلها . فأنت تتعلم بسيرك في العملية . إذا أنت أصررت على « الكمال الرياضى » فمن السهل أن تغلق هذا الطريق الواسع للتقدم ، طريق التجربة والخطأ . إذا تذكرت مدى قرب الهندسة من حرفة النجارة ، ستجنب هذا الخطأ . إذا كانت لديك مسألة تحيرك ، فإن أول شيء يجب عمله هو أن تحاول تجارب قليلة . وعندما تجد طريقة تبدو أنها ستؤدي إلى نتيجة فقد تتمكن من العثور على تبرير مضبوط ، ، « كامل » لطريقتك : قد يكون فى إمكانك إثبات صحة هذه الطريقة ولكن هذا الكمال يأتى فى النهاية ، التجربة تأتى أولاً .

لقد كان علماء الرياضة الأوائل رجالاً عمليين ، نجارين وبنائين . وقد تركت هذه الحقيقة علامات على الكلمات التى استخدمت بالذات فى الموضوع : ما هو « الخط المستقيم » ، « Straight line » . إذا نظرت فى القاموس إلى كلمة « Straight » ستجد أنها تأتى من الكلمة التى تناظر « Stretched » أى الممتد ، فى اللغة الانجليزية القديمة ، بينما « line » هى نفس كلمة « linen » أى تيل « linen thread » أى خيط التيل . وعلى ذلك فالخط المستقيم هو

خيط تيل ممتد ، وذلك كما يدرك تماماً أى شخص يزرع البطاطس  
أو يبني الطوب فوق بعضه البعض .

ولأقليدس يعبر عن هذه المسألة بطريقة مختلفة شيئاً ما . فهو  
يقول إن الخط المستقيم هو أقصر بعد بين نقطتين . ولكن كيف  
يمكنك إيجاد هذا البعد الأقصر ؟ إذا أخذت شريط قياس من  
إحدى نقطتين إلى الأخرى ثم جذبت إحدى النهايتين بأقصى  
ما يمكنك ، وذلك لكي يكون جزء الشريط المحصور بين النقطتين  
أقل ما يمكن ، فإنك ستكون قد وجدت أقصر بعد بين النقطتين .  
وسيكون الشريط ممتداً بنفس الطريقة التي يمتد بها خيط البناء  
أو خيط زارع الحدائق . ( البستاني ) .

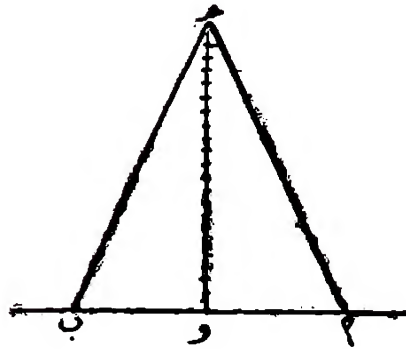
إذا طلب منك تعريف شيء ما ، أسأل نفسك « كيف يمكنني  
أن أصنع مثل هذا الشيء في الحياة المألوفة » ؟

فمثلاً قد يطلب منك تعريف « الزاوية القائمة » . الزاوية  
القائمة ( إذا لم تكن تعرف ) هي الشكل الناتج عندما يتقابل  
خطان على هيئة الحرف « L » ، أى      . ومن ناحية أخرى      / ،  
     / ليست زاوية قائمة .

كيف يمكنك عمل زاوية قائمة ؟ افرض أنك ترغب في قطع  
صفحة من الورق إلى نصفين متناسقين تماماً . ماذا تفعل في هذه  
الحالة ؟ إنك تثنى الورقة بحيث تنطبق حروفها ثم تقطع عند خط

الانثناء الذى تعلم أنه يكون قائماً ، ، على الحرف . إذا أنت  
 ثنيت الورقة بدون أى انتباه فإنك لا تحصل على الزاوية القائمة ،  
 وإنما على شئ يشبه \_\_\_\_\_ : يترك جزء أكبر من اللازم من  
 الورقة على أحد الجانبين . نحن نرى الآن الصفة الخاصة بالزاوية  
 القائمة . كلا جانبي خط الانثناء يبدو ان بنفس الشكل . إذا كانت  
 هناك بقع من الحبر على أحد الجانبين فيجب أن نحصل على  
 انعكاسات لهذه البقع على الجانب الآخر عند بسط الورقة . خط  
 الانثناء يعمل كمرآة . وانعكاس حرف الورقة ، إذا كان لدينا  
 زاوية قائمة ، يقع على الحرف الموجود في الجانب الآخر من  
 خط الثنى .

يمكنك تجربة ذلك بمسطرة أو عصا مشى . يمكن إمساك العصا  
 فى وضع بحيث يبدو انعكاسها كامتداد لها : يمكنك النظر للعصا  
 وانعكاسها تماماً كما لو كنت تنظر لمسورة بندقية . فى هذه الحالة  
 تكون العصا فى حالة زاوية قائمة مع المرآة .



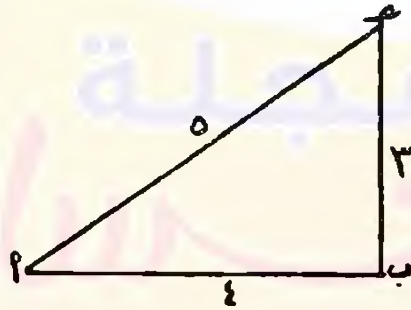
ولكن افرض أنك تخطط ملعباً لكرة القدم ، وتريد أن تحصل على زاوية قائمة . لا يمكنك أن تثني خط التماس على نفسه وتلاحظ أين يقع خط الاثناء ١ ولكن هذه الفكرة عن المראה تبين لنا طريق التغلب على هذه الصعوبة .

افرض أن و هي نقطة خط التماس حيث ترغب في رسم خط عمودي على خط التماس و ١ . نحن نعلم أنه إذا أخذت مرآة ، و ح ، وضعاً صحيحاً فإنها تعكس النقطة ١ بحيث تظهر عند النقطة ب التي تقع أيضاً على خط التماس إذا ثبتت الورقة عند الخط و ح ستقع ١ على ب . والخط و ١ سينطبق على و ب ، والخط ١ ح على ب ح بعد هذا الثاني .

وهذا يشير إلى طريق لإيجاد الخط و ح . إذا بدأنا من و وقسمنا بعدين متساويين على جانبي و ، و ١ ، و ب ، نكون قد حصلنا على ١ وانعكاسها ب . حيث إن ب ح هو انعكاس ١ ح فيجب أن يكونا متساويين في الطول . خذ حبلاً طوله مناسب واربط إحدى نهايتيه عند ١ ، ثم سر محركا النهاية الأخرى على الأرض بحيث يكون الحبل مشدوداً . جميع مواضع هذه النهاية ستكون على بعد مساو لبعد الحبل عن ١ . فك الحبل الآن من ١ واربطه في ب وكرر العملية وارسم مساراً آخر لنهاية الحبل الحرة على الأرض . ونقطة تقاطع هذين المسارين ستكون على

بعدين متساويين عن كل من ١ ، ب . وهذا يكفي لتعيين النقطة ح . نثبت وتبدأ في هذا الموضع ثم نمد خطاً من ح إلى و ثم يطلّي باللون الأبيض بطوله .

يمكنك أن ترى بسهولة كيف أن الطريقة السابقة التي تناسب تخطيط ملاعب كرة القدم ، يمكن ترجمتها إلى طريقة لرسم الزوايا القائمة على الورق باستخدام المسطرة والبرجل ( فرجار ) . ولكن توجد طريقة أخرى مذهشة للغاية ، وهي تستخدم فعلاً في تخطيط ملاعب الكرة .



إذا أخذت ثلاثة قضبان أطوالها ٣ ، ٤ ، ٥ ياردة ووضعتهما بحيث تتقابل نهاياتها كما هو مبين في الشكل فإنك ستجد أن الزاوية ب هي زاوية قائمة . لم يكن أحد ليظن بأن النتيجة ستكون كذلك . ويبدو أن هذه النتيجة اكتشفت منذ حوالي خمسة آلاف عام ، وكان الاكتشاف بالصدفة . والذي وصل إلى هذا الاكتشاف ليس معروفاً ، ولكن الشيء المؤكد هو أن المكتشف كانت له علاقة ما بحرفة البناء ، عاملاً كان أو معمارياً . وطريقة الحصول



على الزاوية القائمة هذه استخدمت كجزء من فن المعمار : ولم يسأل الناس عن سبب هذه الخاصية وكاوا في ذلك مثل سيدة المنزل لا تسأل عن سبب استخدام الخيرة . كان معلوماً أنك تحصل على نتائج طيبة إذا استخدمت هذه الطريقة ، وقد استخدمها المصريون في بناء المعابد والأهرام بنجاح كبير .

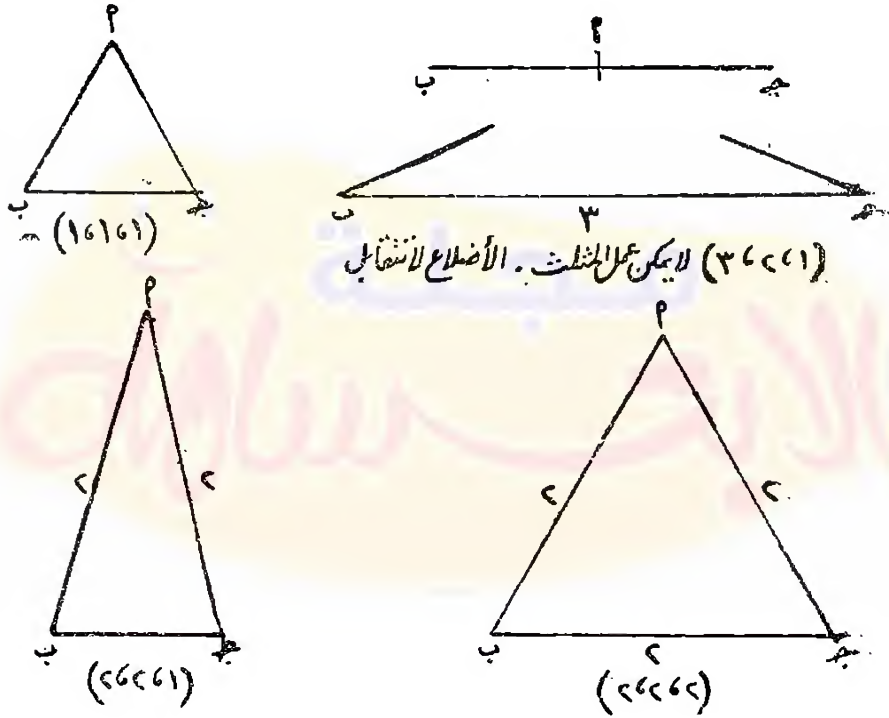
وليس من المعلوم إلى أى مدى أقلق العلماء المصريون أنفسهم في محاولة إيجاد تفسير لهذه الحقيقة ، ولكن من المؤكد أن الرحالة الإغريق الذين زاروا مصر قد وجدوا أن هذه مسألة عويصة وغامضة للغاية . أما العمال المصريون فلم يجدوا في هذه المسألة أى شيء يثير الدهشة . وإذا سألهم الإغريق عنها ففي الغالب أن إجاباتهم كانت : فليرحمكم الله ، لقد كانت هذه هى الطريقة التى تجرى بها هذه العملية دائماً . هل لديكم طريقة بديلة لإجرائها ؟

ويعود الإغريق ويتعجبون . لماذا ؟ ، لماذا ٣ ، ٤ ، ٥ ؟ لماذا لا تؤدي الأعداد ٧ ، ٨ ، ٩ لنفس النتيجة ؟ وعلى أية حال ماذا يحدث لو أننا جربنا الأعداد ٧ ، ٨ ، ٩ أو أى ثلاثة أعداد أخرى ؟

من الطبيعى إذن أن تبدأ بأعداد صغيرة نسبياً وتحاول عمل مثلثات ، مثلاً ( ١ ، ١ ، ١ ) ، ( ٢ ، ١ ، ١ ) ، ( ٣ ، ١ ، ١ ) ، ( ٢ ، ٢ ، ١ ) ، ( ٢ ، ٢ ، ٢ ) ... إلخ لم يكن لدى الإغريق اللعبة

المعروفة باسم الميكانو . فبالميكانو يمكن عمل مثل هذه المثلثات بسرعة . ماهو شكل هذه المثلثات ؟

بمجرد أن تبدأ في التجربة بهذه الطريقة ، ستأخذ في اكتشاف بعض الأمور . ستجد أنه في بعض الأحيان يستحيل عمل المثلث على الإطلاق ، مثلا ( ٣ ، ١ ، ١ ) ، ( ٤ ، ١ ، ١ ) وهكذا .



والواقع أنه كلما كان أحد الأضلاع ( مثلا ٣ ) أكبر من الضلعين الآخرين ( ١ ، ١ ) فإنه يستحيل تكوين المثلث .

وستلاحظ أنك إذا ضاعفت أضلاع مثلث فإن ذلك لا يغير من شكله ( ٢ ، ٢ ، ٢ ) يبدو بنفس شكل ( ١ ، ١ ، ١ ) .

أيضاً المثلث ( ١ ، ٢ ، ٢ ) شكله متزن ومقبول : إذا أنت أدركت المثلث بحيث تتبادل ب ، ح موضع كل منهما فإن المثلث سيظل بنفس الشكل .

وكما أجريت تجارب أكثر برسم أو تكوين المثلثات ، كثرت الأمور التي تلاحظها عنها . ولن تكون جميع هذه الاكتشافات جديدة في الواقع . فمثلاً رأينا فيما سبق أنه في أي مثلث يجب أن يكون الضلع ا ب مضافاً إلى الضلع ا ح أكبر من الضلع ب ح . ولكن ذلك ليس بالامر الجديد . نحن نعلم أن الخط المستقيم ب ح هو أقصر بعد بين ب و ح ، وعلى ذلك فمن الطبيعي أن المسافة تكون أطول إذا ذهبنا من ب إلى ح عن طريق ا وهي المسافة التي تساوي مجموع ا ب ، ا ح . وعلى ذلك فهذه النتيجة بالذات كان يمكن الحصول عليها بالمنطق : أنها تنتج من حقيقة أن الخط المستقيم هو أقصر مسار بين نقطتين .

وبالنسبة إلى إمكانية القيام بأمرين في دراستنا لأشكال الأشياء :

( ١ ) يمكننا اكتشاف عدد كبير من الحقائق .

( ٢ ) يمكننا ترتيبها بنظام يبين أي الحقائق ينتج من الآخر .

والواقع أن الإغريق قاءوا بهذين الأمرين ، وكتب إقليدس في عام ٣٠٠ قبل الميلاد كتابه المشهور عن الهندسة ، واضعاً جميع

الحقائق المعروفة على صورة نظام . ستجد في هذا الكتاب لماذا تعطى الأطوال ( ٣ ، ٤ ، ٥ ) مثلثا قائم الزاوية ، كما برهن أيضاً على أن مثلثات أخرى ، مثل ( ٥ ، ١٢ ، ١٣ ) أو ( ٢٤ ، ٢٥ ، ٧ ) أو ( ٢٣ ، ٥٦ ، ٦٥ ) لها نفس الصفة .

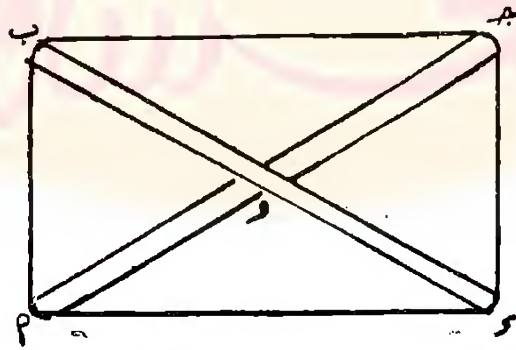
ولكن ذلك كله استغرق وقتا . لقد بنى الهرم الأكبر عام ٣٩٠٠ قبل الميلاد ، بقواعد مبنية على التجربة العملية : لم يظهر نظام إقليدس إلا بعد ٣٦٠٠ سنة من ذلك التاريخ . إننا نكون غير عادلين لو انتظرنا أن يبدأ الأطفال دراسة الهندسة بالصورة التي أعطاها إقليدس . لا يمكن أن تتخطى ٣٦٠٠ عاما من المجهود البشرى بهذه البساطة : إن أفضل طريقة لدراسة الهندسة هي تتبع الطريق الذي سار فيه الجنس البشرى : نفعل الأشياء ، نصنع الأشياء ، نلاحظ الأشياء ، ننظم الأشياء ، وعندئذ فقط نحاول تحليل هذه الأشياء .

وعلى الخصوص لا تحاول أن تكون متعجلا للأمور . فالرياضيات ، كما ترى ، لا تتقدم بسرعة . الأمر المهم هو أن تكون متأكداً من أنك تعلم ما تنكلم عنه : أن تكون لديك صورة واضحة في عقلك . استمر في تقليب الأمور في عقلك إلى أن تحصل على صورة حية واقعية لكل فكرة . وبمجرد أن تتعلم كيف تفكر في صور واضحة ، سيكون تقدمك سريعا وبدون

توتر . ولكن الشيء القاتل هو أن تتقدم وتترك العدو - الفكرة  
المرتبكة - ورائك . إن أفضل من ذلك أن تبدأ ثانية من  
جداول الضرب .

### بعض التجارب المتصلة بعلم الهندسة

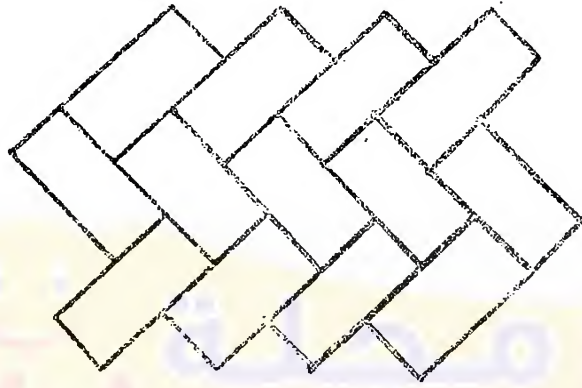
١ - صبي معه قطعة خشب  $AB$  طولها أربعة أقدام . يرغب في  
وصلها بقطعة أخرى  $CD$  هو مبين في الشكل وذلك بحيث إنه  
إذا مر حبل  $AC$  حول المحيط الخارجى فإنه يكون على  
هيئة مستطيل ؟



ما هو الطول الذى يجب أن تكون عليه القطعة  $CD$  ، وعند  
أية نقطة (  $O$  ) يجب وصل القطعتين معا ؟ هل يجب أن تأخذ  
الزاوية المحصورة بين القطعتين قيمة معينة ؟  
٢ - قطعة مسطحة من الأرض مطلوب تغطيتها بالبلاط . جميع

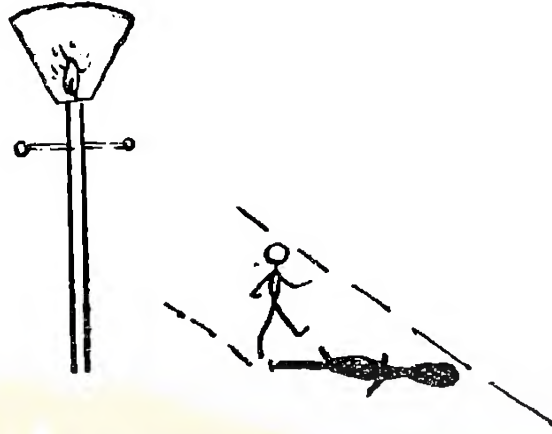


البلاط يجب أن يكون له نفس الشكل والأبعاد ولكن ليس من المهم أن يوجد حرف غير مستو على المحيط الخارجي . أعط أكبر عدد يمكنك من التصميمات للقيام بذلك . أحد الأمثلة مبين في الشكل المعطى فيما يلي :



٣ — ارتفاع مصباح إضاءة شارع عن الأرض ١٢ قدماً . أخذ طفل طوله ٣ أقدام يسلي نفسه بأن يسير بحيث يقع ظل رأسه دائماً على خطوط مرسومة بالطباشير على الأرض . ما هي الكيفية التي يسير بها الطفل إذا كان الخط المرسوم بالطباشير هو : ( ١ ) مستقيم ( ٢ ) دائرة ( ٣ ) مربع ؟ ما هي القاعدة التي تربط بين شكل وأبعاد مسار الطفل وبين الخط المرسوم بالطباشير ؟ ( ملاحظة — لا تشترك مع أحد حول الإجابة عن هذا السؤال قبل أن تكون قد أجريت التجربة بالفعل . وإحدى الطرق الملائمة لإجراء مثل هذه

التجربة هو أخف مصباح منزلي بدلا من مصباح الشارع وقلما  
تمثيل الطفل . سيسجل القلم مساره في أثناء حركته ) .



- ٤ — في السؤال السابق ما هو التغير الذي يحدث إذا أتى الضوء  
من الشمس بدلا من المصباح ؟
- ٥ — رجل طوله ست أقدام يقف على بعد ١٠ أقدام من عمود  
نور . المصباح يقع على ارتفاع ١٢ قدما عن سطح الأرض .  
ما طول ظل الرجل ؟

٦ — يمكن لجوال أن يرى قمتي كنيستين . الأولى تقع أمامه مباشرة  
والثانية إلى يساره مباشرة . ومع الجوال خريطة مبين بها  
مكان الكنيستين بنقطتين ، ولكن ليست لديه أية فكرة على  
الإطلاق عن الاتجاه الذي يواجهه ، هل هو الشمال أو الجنوب  
أو أية نقطة أخرى على البوصلة . ماذا يمكنه أن يعرف عن مكانه

على الخريطة ؟ (طريقة مقترحة. ثبت مسمارين في قطعة مستوية من الخشب. افرض أن هذين المسمارين يمثلان الكنيستين. خذ قطعة من الورق المقوى ، أحد أركانها زاوية قائمة ، واجعل ضلعي الزاوية يمران بالمسمارين كل على مسمار كما هو مبين في الشكل في هذه الحالة تكون ق هي الموضع المحتمل لوقوف الجوال . وذلك لأنه إذا نظر في الاتجاه ق ١ ستكون ب على يساره مباشرة . حدد موضع ق على الخشب . اجعل الورقة



تنزلق على لوحة الخشب و حدد مواضع أخرى ممكنة بنفس الطريقة . جميع هذه النقاط تقع على منحنى معين . ما هو هذا المنحنى ؟

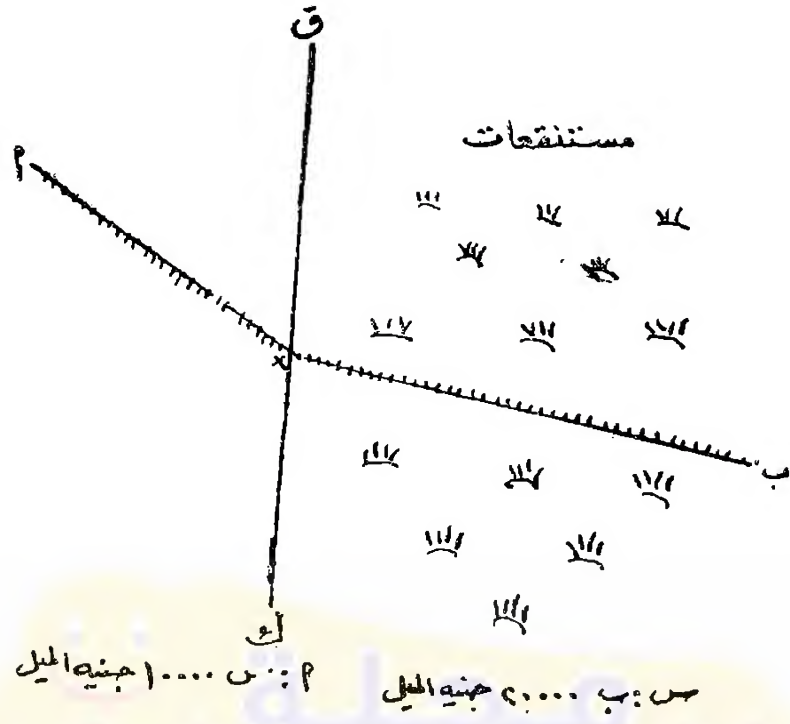
٧- في مجال رماية مصغر طوله ٢٥ ياردة ، مطلوب تصميم هدف متحرك يمثل سيارة طرفها ٢٠ قدما وارتفاعها ١ قدما ، وتبعد مسافة نصف ميل وتتحرك بسرعة ٢٠ ميلا في الساعة. المفروض

أن الراى سىكون فى موضع يمكنه من رؤية جانب واحد من السيارة. ماهى الأبعاد التى يجب تمثيل السيارة بها ، وماهى السرعة التى يجب أن تتحرك بها على الستار ؟

٨ - يرغب عنكبوت فى الزحف من أحد أركان طوبة ١ إلى الركن المقابل ب وذلك بأقصر طريق ممكن . ماهو المسار الذى يجب أن يتبعه ؟ بالطبع يزحف العنكبوت على سطح الطوبة - لا يمكنه أن يخترق الطوبة .

(المواد المطلوبة : عدد من الطوب بأشكال مختلفة ، قطعة حبل يمكن أن تمتد بين ا ١ و ١٦ ، من المفيد الاستعاضة عن قوالب الطوب بورق مقوى وذلك بثنية . بعد الوصول على أقصر بعد وتحديد به علامات على الورق المقوى ، يمكن جعل الورق مستويا ثانية ، ويجب ملاحظة الصورة التى يأخذها المسار عندئذ ) .

٩ - احصل على نموذج لكرة أرضية . مد خيطاً بين مكانين عليها خذ مذكرة بالآماكن التى يمر عليها الخيط . عين هذه الآماكن على خريطة للعالم بأطلس ( إسقاط مركز انور ) . لاحظ كيف يختلف المنحنى الذى يمر بها عن مستقيم مرسوم على الخريطة ، هذه الحقيقة مهمة بالنسبة للبحارة والطياريين الذين يطرون مسافة طويلة ( ملاحظة الدائرة العظمى ) .

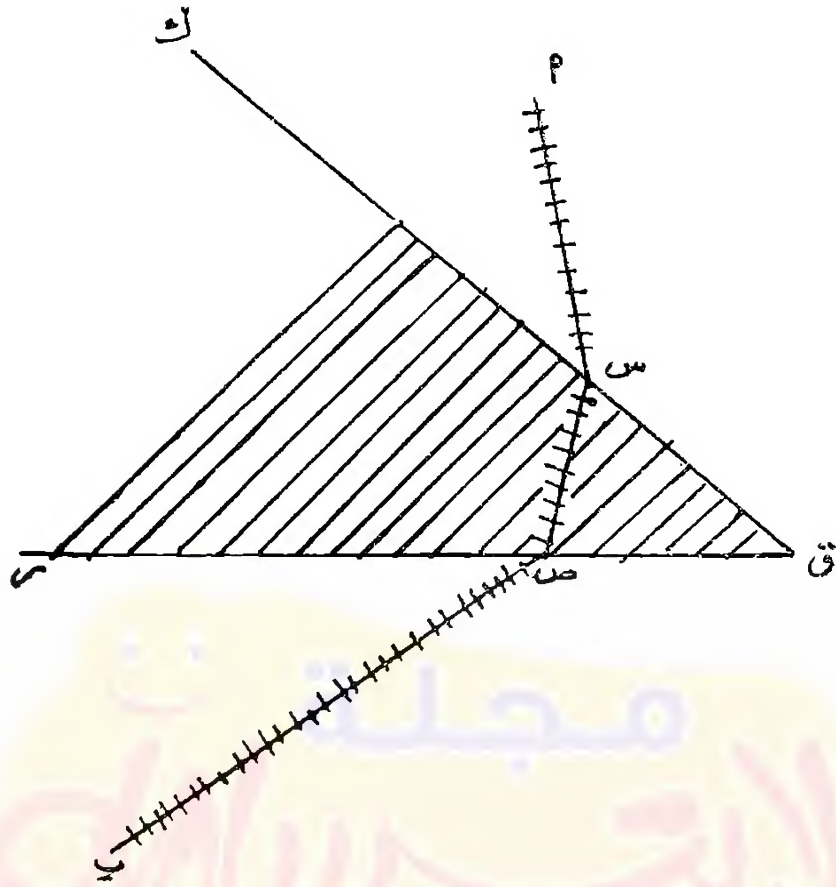


أوجد أفضل مكان للموضع س

١٠ - مطلوب مد خط سكة حديدية بين مدينتين م، ب. الأرض على يمين الخط ق ك بها مستنقعات؛ ونتيجة لذلك فإن تكاليف مد ميل من القضبان في هذه المنطقة هي ضعف مثيلتها على يمين ق ك. ارسم عدداً من الطرق الممكنة للسكة الحديد من م إلى ب. احسب تكاليف الإنشاء، وأوجد بأقرب ما يمكنك الطريق الذي يجعل التكاليف أقل ما يمكن. (انظر الشكل الموجود في صفحة ٢٠).

(ملاحظة: لا يتوقع منك أن تجيب على هذا السؤال بإجراء





الحسابات فقط . ارسم خطة لنفسك ، ضع المدينتين ١ ، ب  
حيثما ترغب وقس أية خطوط تريد قياسها ، افرض أن الميل من  
خطوط السكك الحديدية على يسار ق ك يتكلف في الواقع  
١٠٠٠٠ جنيه نحن نريد الإجابة بأية طريقة - بالحساب أو بالتجربة ،  
أو بالاثنين معاً . لا تهتم بمقاله لإقليدس عام ٣٠٠ قبل الميلاد )

١١ - هذا السؤال شبيه بالسؤال السابق فيما عدا أن صورة العائق  
مختلفة . مطلوب بناء سكة حديدية تربط بين ١ ، ب ولكن

يوجد بينهما مساحة من الأرض الصعبة لك. ر. عين أفضل طريق  
للسكة الحديدية . (تنشأ مسائل من هذا النوع في الحياة العملية  
وذلك عندما تقع أراضي جبلية بين المدينتين . في هذه الحالة  
تكون التكاليف الزائدة ناتجة عن الحاجة لحفر الأنفاق )  
انظر الشكل صفحة ٣٧ .

**\*\* معرفتي \*\***  
**www.ibtesama.com**  
**منتديات مجلة الإبتسامة**

## الباب الثالث

### طبيعة التدليل

«كلما كثرت مشاهداتي للرجال والأولاد زدت اعتقاداً بأن طريقتي في الدراسة هي الطريقة المألوفة الطبيعية وأن المدرسين يهدمون ما يستبدلون بها شيئاً يكاد يكون ( مجرد الحفظ ) ، جون بيرى عام ١٩٠١ .

في إحدى المناسبات ؛ علق برناردشو ، تعليقاً قاسياً قال فيه : «إن الناس الذين يعرفون عمل شيء ما ، يقومون بعمله بينما الذين لا يعرفون عمل شيء ما تضطربهم ظروف الحياة إلى تكسب عيشهم بتعليم غيرهم ،

والواقع أن التدريس هو أشق بكثير من مجرد «عمل شيء ما» . إذ في مقابل كل مائة رجل بارعين في لعبة كرة القدم ستجد رجلاً واحداً يمكنه أن يعلمك كيف تلعب هذه اللعبة جيداً . فأنت تجد مئات من الأطفال النابغين ومئات من الأطفال الخاملين ، ولكن نادراً ما تجد طفلاً كان خاملاً في البداية أصبح نابغة نتيجة لمساعدة مدرس . وهذا هو محك الاختبار للمدرس . وأغلب المدرسين

الآمناء مع أنفسهم تحملهم الأمانة على الاعتراف بأنه في الأغلب  
الاعم ، سيتقدم الفصل بنفس الدرجة إذا لم يوجد المدرس على  
الإطلاق ، سيبقى التلاميذ النابغون نابغين والخاملون خاملين .

ترى هل معنى هذا أنه يوجد في الواقع عنصران من الرجال . أولئك  
الذين يولدون لينجحوا وأولئك الذين يولدون ليفشلوا ؟ وترى  
هل د للرجال العظماء ، طريقة خاصة للتفكير لا يتمتع بها الناس  
العاديون ولا يمكنهم فهمها ؟ .

توجد بالطبع فروق معينة في الأجسام والعقول التي يرثها  
الأطفال عن والديهم ، وتوجد حالات نقص عقلي حيث لا تقوم  
عدد مهمة بوظائفها ، وفي هذه الحالات يجب أن يحجز الأطفال  
في بيوت خاصة . وقد يكون الحال أن الغدد ، أو أية عوامل  
أخرى ، تضع حداً لقدرات كل فرد منا ، ومن ثمة فإن من العبث  
محاولة الحصول على مهارة أعلى من هذا الحد . ومهما يكن من  
شيء فمن المؤكد أن ما من واحد في كل ألف من الناس يستغل  
الغدد أو القدرات العقلية التي يمتلكها استغلالاً تاماً ، أو يعمل  
لاستغلال قدراته بما يصل به إلى الحد الطبيعي الذي يؤهله له  
ذكائه . ومن المؤكد أننا لا نستطيع أن نعزو إلى تأثير الغدد أن  
شخصاً يكون لامعاً وذا أفكار إيجابية خارج حجرة الدراسة بينما  
يكون خاملاً في كل ما يتعلق بالمدرسة ، والحق أن السر في هذا

ينبغي أن يلتبس في أشياء أخرى خارج هذا النطاق .  
على أنه مما ينبغي أن نوليه اهتمامنا في هذا المقام أن نبحث عما  
يقوم به « الرجال العظماء » ، أو رجال الأعمال الناجحون في أعمالهم ،  
ويعجز الآخرون عن القيام به . وأن نقف على الصفات الضرورية  
التي تمكن الإنسان من أن يجيد لعبة ما ، أو أن يكون رساماً أو موسيقياً  
أو مهندساً أو فلاحاً ، أو عالماً من علماء الرياضة ؟ وهل في الإمكان  
تطوير هذه الصفات بتمرينات مناسبة ؟ وهل من الممكن للشخص  
العادي إذا هو صمم على أن يحصل على هذه الصفات ؟ الحق أنه يوم  
يستطيع المدرسون الإجابة عن هذه الأسئلة ، ويوم يستطيع كل  
فرد أن يستغل قدراته إلى أقصى حدودها ، يكون الوقت قد حان  
عندئذ للكلام عن الفوارق الموروثة في الذكاء . ولكن ذلك لن  
يأتي أوانه إلا بعد عدة قرون .

إن لدينا في الوقت الحاضر عدداً من الكتب يمكن أن نتعلم منها  
ونستفيد، ومن الخير لنا أن نمضي الساعات في البحث في مكتبة كبيرة  
عن مثل هذه الكتب بدلاً من قراءة مئات الكتب التي ألفها  
مؤلفون من الدرجة الثانية . إنه لأمر بعيد الاحتمال للغاية أن تهبط  
عليك أو على أفكار مبتكرة فعلاً لم يسبقها الغير إليها . ذلك أن  
الناس فيما يبدو ينتمون إلى فصائل معينة . فإذا وجدت نفسك  
مثلاً تميل إلى أي موضوع ، فإن الاحتمال كبير جداً في أنك ستجد



شخصاً ما آخر قد اهتم بالموضوع نفسه . وستجد وجهات نظرك مدروسة في كتاباته أو كتاباتها . وبالتالي فإنه يمكنك البدء في دراسة الموضوع من حيث انتهى من قاموا بدراسته قبلك .

وفي كثير من الأحيان قد يجد الإنسان في قراءته كتباً كتبت عن موضوعات أخرى غير موضوع بحثه ما يعينه على دراسة أو تدريس موضوعه . ومن قبيل ذلك ما وقع لي حين وقعت على كتاب في إحدى المكتبات عنوانه «السباحة للجميع» فقد استبان لي في قراءته أنه يتبع منهجاً في البحث يمكن تطبيقه على أغلب الموضوعات الأخرى . ففي هذا الكتاب يفسر المؤلف أولاً قواعد السباحة . ثم يشرح الفرق بين الحركات التي نحتاج إليها في الماء وبين الحركات التي نقوم بها لا شعورياً نتيجة لحياتنا على اليابسة وبعد ذلك يعطى المؤلف سلسلة من التجارب والتدريبات تكفي لإقناعنا بصدق ملاحظات المؤلف ، وتوفر للقارىء لا معرفة هذه الحقائق فحسب وإنما أيضاً الشعور العميق بصدقها ، بل والقدرة على تطبيقها تطبيقاً صحيحاً لا شعورياً .

إن الكتاب الذين يكتبون عن لعبة التنس (كرة المضرب) يسوقون ملاحظات يمكن أن يتخذ منها قياساً يطبق على غيرها . فهم يقولون إنك يجب ألا تبدأ بمحاولة ضرب الكرة في نطاق الملعب وإنما يجب أن تبدأ بضرب الكرة بشدة ، وبأسلوب جيد

وبالتدريج ستجد أن الكرة ترتد بعد ضربها إلى الملعب . أما إذا بدأت بالقلق حول أين تذهب الكرة ، فإنك ستبقى لاعباً ضعيفاً على الدوام . وأغلب هذا الكلام صحيح بالنسبة للرياضيات . والامر المهم هو أن تعلم كيف تصل إلى الهدف بنفسك وأن أى أخطاء تقع فيها يمكن تصحيحها فيما بعد . أما إذا بدأت بمحاولة أن تكون كاملاً فإنك لن تصل إلى شيء . ذلك أن الطريق لبلوغ الكمال لا يتحقق إلا بالمحاولة والخطأ .

وهذا يذكرني بكتاب عن الرسم قرأته من عدة سنوات مضت وللأسف أنى لا أذكر اسم المؤلف<sup>(١)</sup> . لقد حاول أن يعلم الرسم بطريقة تجعل قراءه يجلسون في الدور العلوى للسيارة العامة ويسجلون على الورق التعبيرات المرتسمة على وجوه الناس . وينصح المؤلف بأن تستخدم فى ذلك الورق المهمل وألا تغير من رسم رسمته على الإطلاق . ألق به جانبا إذا ظهر أنه خطأ وابدأ ثانية . ولا تهتم بما إذا كانت الأشياء بشكلها الصحيح أم لا . ارسم باختصار ما تراه فعلاً ، وعلى الخصوص الظلال . لا ترسم خطوطاً إلا إذا

---

(١) ربما الرسم للأطفال تأليف فرنون بليك

Drawing for Children by Vernon Blake وإحدى الملاحظات  
المقتبسة هي من كتاب كيفية الرسم من الطبيعة للمؤلفة ل : دوست

رأيتها قائمة فعلا . اعتبر رسومك الأولى مجرد تصوير بدائي ،  
ولاحظ ما تراه فعلا . وبالتدريج ستجد أن أشكال رسومك  
ستصبح أقرب تعبيراً عن الحياة ، ولكن حتى رسومك الأولى  
التي لم تكن النسب فيها صحيحة ستعبر عن شيء ما حقيقى وملبوس  
وقد أعطى المؤلف رسوم بدائية للغاية لتوضيح هذه الحقيقة .  
وأنا لا أعلم أى شيء عن الرسم ولكنى إذا أردت أن أتعلّمه فمن  
المؤكد أننى سأتعلم بهذه الطريقة .

وفى جميع الموضوعات يبدو أن هناك طريقة لمعالجتها بشكل  
مُشجع ومثير للاهتمام . ورجال العظام ، هم فى الغالب الرجال  
الذين أثار اهتمامهم موضوع بالصدفة أو بالنجرة أو نتيجة لتأثير  
المدرسين الممتازين ووفقوا إلى طريق المعالجة الصحيح . إن الذى  
يجعلنا نعتقد بأن الأشخاص النابغين نوع أرقى من غيرهم هو  
الجهل بطريقة معالجة الموضوع . وكلما زادت دراستنا لطرق  
العظام بدت هذه الطرق عادية .

وفى كثير من الأحيان تعطينا القصص غير المنشورة انطباعاً  
خاطئاً . توجد قصة عن نيوتن والتفاحة : رأى نيوتن تفاحة تسقط  
وتسأل عن سبب سقوطها — هكذا يقال لما ومن غير المحتمل  
على الإطلاق أن يكون نيوتن قد فعل شيئاً مثل ذلك . فحتى يومنا  
هذا نحن لا نعلم سبب سقوط التفاحة . إن الأكثر احتمالاً هو أن

نيوتن فكر كما يلي : ماذا يحدث لو أن التفاحة أسقطت من ارتفاع كبير جداً ؟ من الواضح أنها ستسقط أيضاً في هذه الحالة مهما كان ارتفاعها عن سطح الأرض . إذا لم يكن الأمر كذلك فإنه سيوجد ارتفاع معين إذا وصلت إليه التفاحة فإننا نجد أنها لا تسقط . وهذا ممكن ولكنه بعيد الاحتمال . وعلى ذلك فيبدو من المحتمل أنه حتى لو وصلنا إلى القمر أو الشمس سنظل نشعر بجذب الأرض ولو أن هذا الجذب قد لا يكون بنفس شدته على الأرض . وربما يكون هذا الجذب هو الذى يجعل القمر يتحرك قريباً من الأرض ، وهو نفسه الذى يجعل الأرض تدور حول الشمس ؟ وعلى أية حال هذه هي النتيجة التى توصل إليها نيوتن من التفاحة ، وهى أن كل قطعة من المادة فى الكون تؤثر بجذب على كل قطعة أخرى مهما كان بعدها عنها . إن أحداً لا يشك فى عظمة نيوتن ، ولكن ما من أحد كذلك يمكن أن يدعى أن الطريقة التى وصل بها نيوتن إلى هذه الحقيقة فيها شيء خارق يفوق طاقة البشر .

### التدليل فى الرياضة

نتعلم من الرياضة كيف نحل الألغاز . وكل منا يعرف أن من السهل حل لغز إذا أعطينا جوابه . وليس هذا إلا اختباراً للذاكرة . يمكنك أن تدعى أنك رياضى إذا أنت بمفردك دون

مساعدة شعرت بأنك ستكون قادراً على حل لغز لم تدرسه ولم يدرسه غيرك من قبل . هذا هو اختبار القدرة على التدليل .

ماهى بالضبط قدرة التدليل؟ وهل هى شىء مختلف عن قدرات العقل الأخرى؟ هل هى شىء محدد؟ أم شىء يمكن التمرين عليه وتنميته؟ وماهى الكيفية التى نحصل بها على مثل هذه القدرة؟ يبدو لأول وهلة أن التدليل الرياضى هو من نوع خاص . كما يبدو أنه لا يوجد له مكان فى العلوم التجريبية ولا فى الفنون الخلاقية .

بعض الموضوعات هى نتيجة التجارب العلمية أو التجربة اليومية . الكيمياء تبحث فيما يحدث عندما تسقط المعادن فى السوائل ، أو عندما تخطط محتويات إناء بمحتويات إناء آخر . والميكانيكا تبحث فى حركة الأجسام الصلبة . كما يسجل التاريخ أعمال الرجال . ودراسة اللغات تبحث فى الكلمات التى تستخدمها الشعوب فى أجزاء العالم المختلفة . ومن السهل أن نرى كيفية الحصول على المعلومات التى يشتمل عليها كتاب فى الكيمياء أو الميكانيكا أو التاريخ أو اللغة الفرنسية .

ومن ناحية أخرى توجد الموضوعات الأخرى ( التى يعشقها الأستاذ جود ) والتى تختلف فيها آراء الناس ، وهذه هى الموضوعات



التي لا تعتمد على البرهان على الإطلاق — وإنما تتمثل فيما تميل إليه ، فيما ترى أنه ينبغي عمله ، في نوع الشخص الذي تعجب به ، في الحزب الذي تعطيه صوتك . هذه هي أشياء تتحمل أنت بالذات مسئوليتها وهي تبين أي نوع من الأشخاص أنت . قد تكون مستعداً لأن تقاوم المحافظة على نوع العالم الذي تعتقد أنه الأفضل : حقاً يجب عليك ذلك . ولكنك لا تغير أفكارك الأساسية عن الأشياء التي تتوفى إلى الوصول إليها نتيجة للمناقشة والبرهان . وإنما قد افترض أن الميكروبات تحلم بعالم لا يقاوم الجدرى ، ونحن لا نستطيع أن نشبت أن هذا العالم لم يذشأ لمصلحة الميكروبات ، وكل ما يمكننا عمله هو أن نستخدم كميات كبيرة من المواد المضادة للعدوى .

تبدو الرياضة موضوعاً غريباً ، فالأمر فيها ليس مسألة ذوق وإنما الأمر فيها لا يعدو الخطأ والصواب . ففي هذا العلم ، أكثر من أي علم آخر ، توجد إجابة صحيحة وإجابة خطأ . ولكن من ناحية أخرى لا يبدو أن هذا العلم يختص بأي شيء محدد . فجزء كبير منه ومهم مثلاً يختص بالجزر التربيعي للعدد — ١ ، وهو شيء مارآه أو أحس به أو ذاقه إنسان ما على الإطلاق . ومع ذلك فليس هناك أدنى شك فيما يتصل بخواصه .

في الأزمنة القديمة كان الفلاسفة يجدون من الصعب تفسير

قدرات الإنسان على التدليل وكان يصلون إلى نتائج غريبة .  
وإحدى هذه النظريات كانت أننا قد عشنا في دنيا أخرى قبل  
ولادتنا ، وأننا في تلك الدنيا تعرفنا على قوانين الحساب والهندسة  
( ولا أدري إلى أى مدى كانت مقررات الدراسة حينئذ ) .  
وغرض التعليم في دنيانا الحالية هو مجرد إيقاظ ذاكرتنا  
واسترجاع هذه المعرفة .

يجب ألا نسخر من هذه النظرية القديمة . فهي على الأقل  
توضح أن مكونات التعليم هي التعاون مع ما دخل عقل الطفل  
فعلا . والمدرس الجيد يستطيع في معظم الأحيان أن يوضح  
أفكاره بمجرد أن يسأل في الفصل بعض الأسئلة ، ويجعل التلاميذ  
يتحققون بوضوح عما يعرفونه فعلا وما هو مخزون داخل عقولهم .  
والتفسير الذي أصبح في متناولنا الآن ، والذي كان من  
الصعب على الفلاسفة القدماء التكهن به ، قد وضعه في أيدينا علم  
الآحياء . ذلك أنه أصبح من المسلم به بصفة عامة أن الحياة قد  
وجدت على الأرض منذ الملايين من السنين ، وأننا نولد بغرائز  
اختبرت وتطورت خلال صراع طويل في سبيل البقاء .  
وبالإضافة إلى هذه الغرائز حصلنا على تدريب ، أعطى لنا على  
الخصوص في السنوات الخمس الأولى من حياتنا . وهو مبنى على  
التقاليد التي يرجع بعضها إلى خبرة اكتسبت من آلاف السنين .

وهكذا فإننا عندما نبلغ سن الخامسة نصبح ، إن جاز هذا القول ،  
ساعة صناعية راقية ، وعلى العموم نبدأ بعد هذه السن نصبح واعين  
لقدرتنا على مجادلة الأمور لأنفسنا .

وعلى ذلك فإذا وجدنا في أنفسنا رغبة قوية لعمل شيء معين ،  
أو لتصديق شيء معين ، فعلى أقل تقدير يمكن القول بأن  
هذه الرغبة في الإنسان موجودة في الإنسان إما لأنها ساعدته  
على البقاء ، وإما لأنها أثبتت قيمتها في عصور من الصراع مع العالم  
الواقعي . ومن ثم فالحيوانات التي تبقى ، والأجناس التي تبقى هي  
الحيوانات والأجناس التي تفعل الشيء الصحيح . وعلى ذلك يجب  
علينا أن نتوقع أن المنح البشري والعقل البشري ، قد تكونا  
على العموم بحيث ينتجان التصرف الصحيح في أى ظرف . ويجب  
ألا نتوقع منهما أن يكونا تـكـوـنـهـما بحيث تنتج الفكرة المنطقية  
الكاملة . ففي الواقع كثيراً ما نجد أشخاصاً يفعلون الشيء  
الصحيح وإن أخطأوا أسبابه ودوافعه . فالمتوحشون لا يعرفون  
أى شيء عن أسباب المرض ، ولكن إذا وجد مكان مكرز  
للعدوى فإنهم يقولون إن الذهاب إليه يجلب سوء الحظ ، إذ أن  
هذا المكان مسكون بروح شريرة .

لقد بينا في الباب الثاني أن علم الهندسة مر في الواقع بالمرحلة  
التي كان العامل فيها يعمل الشيء الصحيح دون أن تكون لديه

نظرية تشرح له سبب ذلك ، والواقع أن الهندسة والحساب كلاهما مرتبطان بالحياة اليومية ؛ فالهندسة مرتبطة بصناعة البناء والحساب بدفع النقود . فإذا أنت أعطيت المحصل ثلاثة قروش ثمناً لتذكرتين قيمة كل منهما قرشان فإنه لن يكون مستعداً للتصديق بأن القول إن ضعف الاثنين أربعة هو مجرد تعبير ابتدعته الجامعة . إنه يعتبرها حقيقة ثبتت ثبوتاً راسخاً من تجربة الحياة اليومية .

لقد وضح الآن أن الرياضة مثلها مثل الكيمياء ، هي شيء نتعلمه من خلال تجاربنا في العالم الواقعي . سيعترض بعض الناس بشدة على ذلك . سيقولون « نستطيع أن نتصور أن القصدير يسقط في حامض الكبريتيك دون أن يحدث شيئاً ، ولكن هل يمكنك أن تتصور أن اثنين واثنين يساويان خمسة » ؟

من المؤكد أنني لا يمكن أن أتخيل أن اثنين واثنين يساويان خمسة . إذا ادعى رجل أنه يستطيع أن يفعل المعجزات وأمكنه أن يجعل ضعف الاثنين يساوي خمسة فإنني أعطيه الدرجة النهائية . وهذه المعجزة ستؤثر في أكثر من أية معجزة أخرى .

ولكن ليس هذا هو بيت القصيد . المسألة هي لماذا لا يمكننا أن نتخيل أن ضعف الاثنين يساوي خمسة ؟ .

يوجد تفسيران محتملان : الأول ، أن لنا قدرة غامضة وهبت  
لنا في حياة سالفه أو منحناها بآية طريقة أخرى . والثاني أننا لا يمكننا  
أن نتخيل ضعف الاثنين مساوياً خمسة لأنه في خلال تاريخ  
الإنسان كله كان ضعف الاثنين يساوي أربعة ولم توجد حاجة  
لكي نتخيل عقولنا أيه صورة أخرى لهذه المسألة .

التفسير الأول لا يتفق مع تجربة معظم المدرسين ، صحيح أنه  
قد يوجد أشخاص يتمتعون بقدرة كاملة على التدليل بدرجة تؤيد  
وجهة النظر هذه ، ومن ثم يكون مما يشير الاهتمام معرفة المدارس  
والكليات التي تلقنوا العلم فيها . ولكن مع ذلك فإن الإنسان يجد  
في أعمال الرياضيين العظماء أدلة على أخطاء سخيفة وعلى عدم فهمهم  
وعلى محاولات شاقة لتبين الطريق نحو الحقيقة .

وربما تكون الضربة القاضية لنظرية « القدرة الغامضة » هي  
حقيقة أن علماء الرياضة الحاليين يرفضون ما كان يعتقد به  
الرياضيون القدماء اعتقاداً راسخاً . لقد كانت العادة في وقت من  
الأوقات إذا أردنا تأكيد صحة مبدأ ما أن نقول بأن صدق هذا  
المبدأ هو كصدق أن مجموع زوايا المثلث يساوي زاويتين قائمتين .  
فإذا كان أينشتين على حق فإن مجموع زوايا المثلث لا يساوي  
زاويتين قائمتين . لقد حطمت كل من نظرية النسبية ، وميكانيكية



الكم معتقدات ظلت مؤكدة مدة طويلة ، وأجبرتنا هاتان النظريتان على أن نعيد النظر في أسس معتقداتنا .

إذا أنت تقبلت هندسة إقليدس لأنها تتفق مع ما تراه من أشكال الأشياء ، فإن افترض أحد الأشخاص أن إقليدس قد يكون مخطئاً بأحد قليلة من المليون من البوصة في نواح معينة ، لا يكون من قبيل الإزعاج بلا مبرر. ذلك لأنه يتعذر عليك رؤية جزء من المليون من البوصة ، وهندسة أينشتاين لا تفرق عن هندسة إقليدس إلا بأحد من المليون ولكن إذا أنت اعتقدت أن إقليدس على حق مطلق فإنك تكون في ورطة . والواقع أن إقليدس نفسه قال « إذا أنت قبلت أشياء معينة فلا بد أن تقبل أن مجموع زوايا المثلث يساوى قائمتين » .

ومن ناحية أخرى توجد ظواهر تشير الاهتمام للطريقة التي بنيت بها أفكار الإنسان خلال التجارب اليومية . وإحدى هذه الظواهر تتمثل في الكلمات التي نستعملها . حاول أن تتخيل رجلاً من أهل الكهف ( أو أى شخص آخر كان هو أول من طور لغة ) يحاول أن يقول لصديق له « الذى يقوله هذا السكائب عن الجذر التربيعى ناقص واحد لا يتفق على الإطلاق مع فلسفتى » . ترى كيف سيستطيع أن يجعل صديقه يفهم ما يعنيه بكلمات مجردة مثل « فلسفة » ، « ناقص واحد » ، « يتفق » ، وما إلى ذلك ؟ كل طفل تقابله

هذه المشكلة وهو يتعلم الكلام . كيف يمكن للطفل أن يعرف معاني الكلمات فيما عدا أسماء الناس والأشياء التي يمكنه رؤيتها ؟  
ومما يوضح الأمر أن نأخذ قاموساً ونبحث فيه عن مثل هذه الكلمات ويكاد المرء دائماً يجد أن مثل هذه الكلمات المطلقة ، أسماء الأشياء التي لا يمكن رؤيتها ، تأتي من الكلمات الخاصة بأشياء أو أفعال واقعية . خذ مثلاً كلمة يفهم understand في كل من اللغتين الألمانية والإنجليزية نجد أن هذه الكلمة ترتبط بالكلمات ، الوقوف تحت to stand under وفي اللغة الفرنسية الجملة « هل تفهم ؟ » هي Comprenez vous وهي تعني هل يمكنك أن تمسك بذلك ؟ وهي تشبه العبارة الإنجليزية Can you grasp it وحتى يومنا هذا يقول الناس عبارات مثل « حاول أن تدخل ذلك في رأسك Try to get it in your head » عند تعلم الكلام ، يكاد الطفل يتبع نفس الطريق . فهو يحفظ أسماء والديه وأسماء الأشياء الموجودة بالمنزل ، وهو أيضاً يحفظ الكلمات التي تصف ما يشعر به ، « هل أنت جائع ؟ » ، « هل أنت متعب ؟ » ، « هل أنت سعيد ؟ » ، « لا تخف » ، « ألا يمكنك أن تتذكر » ، « قل إنك آسف » .

كل فيلسوف ، كل أستاذ ، كل معلم . . كلهم بدأوا بنفس هذه الطريقة . . بكلمات تصف الأشياء التي ترى والأشياء التي يشعر بها . وجميع الأفكار المعقدة التي فكر فيها على مر الزمان تستند إلى هذا

الاساس كل كاتب أو خطيب أدخل كلمة جديدة كان عليه أن يشرح معناها بواسطة كلمات أخرى، كلمات يعرفها الناس فعلاً ويفهمون معناها. من الممكن عمل رسم شكل ضخم يمثل اللغة الإنجليزية تكون فيه كل كلمة مستندة إلى مجموعات من كلمات أخرى هي الكلمات التي تفسرها. وفي أسفل سيكون لدينا كلمات لا تستند على شيء. وهذه ستكون الكلمات التي يمكن فهمها مباشرة من من تجاربنا - وهي ما نراه وما نشعر به وما نفعله.

فمثلاً، الفلسفة هي ما يقوم به الفيلسوف. كلمة الفيلسوف تعني «محب الحكمة». وعلينا أن نتعلم معنى «الحب» و«الحكمة» من حياتنا اليومية.

وما ينطبق على الفلسفة ويصح بالنسبة لها هو أيضاً صحيح بالنسبة للرياضة: تقع جذورها في الخبرة العادية للحياة اليومية. إذا أمكنك أن تفتني أثر الطريق الذي تطورت به الألفاظ الرياضية بالتدريج من الكلمات التي تستخدمها يومياً فإنك ستتمكن من فهم ماهية الرياضة.

النقطة الأساسية التي يجب استيعابها هي أن التدليل الرياضي لا يفرق عن قدرات العقل الأخرى، كما أن الرياضة غير منفصلة عن أمور الحياة الأخرى. على العكس تماماً: الرياضة نمت من ظروف الحياة، كما أن التدليل نما من التجربة.

وثمة ظاهرة أخرى للطريقة التي صنعت بها عقولنا نَجدها في القانون المعروف جيداً لعلماء النفس ، ولا يوجد أى شيء في الخيال لم يكن موجوداً من قبل في الشعور . مثلاً حاول أن تتخيل لونا جديداً . ستجد أنك ببساطة تجمع تأثير الألوان التي رأيته من قبل . أو حاول أن تتخيل الجنة ، أو دنيا مثالية . ستجد نفسك تجمع ذكريات أسعد أوقانك ، أو تاركاً جميع الأشياء التي أثارت غضبك . في إحدى مدارس إسكتلندا ، كتب الأطفال ( وكانوا يجلسون على مقاعد غير مريحة ) مقالاً عن المدرسة المثالية . بدأ تسعون في المائة من التلاميذ مقالهم بأن ذكروا أنه في المدارس المثالية توضع وسادات على المقاعد ، وبعد ذلك وصفوا كيف أن المدرسين يرتعدون خوفاً من القواعد الصارمة التي يضعها التلاميذ .

### التدليل والتصور

لقد بحثنا فيما قبل العبارة «ضعف الاثنان أربعة» ، وقلنا إننا لا يمكن أن نتصورها خلاف ذلك . هذه الحجج تبين بوضوح الارتباط بين التدليل والتصور ؛ ففي الواقع ليس التدليل أكثر أو أقل من تجربة تجرى في التصور . في أية قصة بوليسية جيدة ، يحاول المخبر أن يتصور بأقصى ما يمكنه من الوضوح هيكل جريمة

ويرى كيف تتفق أقوال كل من الشهود المختلفين مع الصورة العامة. ويتمكن من تتبع القصة والتدليل باستخدام مجرد تصورنا (سر ماري روجت لإدجار آلن بو ، The mystery of Marie Roget) هي مثال جيد على استخدام التعليل التصوري في الكشف عن غوامض جريمة من الحياة الواقعية (١).

ليس من الضروري على الإطلاق أن يبدأ التدليل بخطوات واضحة محددة . إذا أنت سمعت إشاعة تعنى أن صديقك أحمد متورط في بعض الأعمال الكريهة ، فقد تقول ، أبالا أصدق هذه القصة ، أحمد لا يمكن أن يفعل مثل هذا ، قد لا يكون في إمكانك أن تذكر قصص أعمال بطولية قام بها أحمد ، أو أن تعطى أى دليل محدد على الإطلاق . شعورك هو مجرد أن أحمد شخص حسن السلوك ، ومع ذلك فهذا هو مثال جيد جداً على التدليل . وستتوقف صحة النتيجة التي توصلت إليها أو خطؤها على طول المدة التي عرفت أحمد فيها ، وعلى ما إذا كنت تعرفه جيداً . وستجد أن من الصعب جداً جعل الجمهور يشاركك ثقتك في أحمد . فليس لديهم خبرتك

---

(١) انظر المذكرات والمقدمة في كتاب دوروثي . ل . ساير قصص بوليسية قصيرة وعظيمة ، والغموض والرعب الجزء الأول (الناشر جولانز)



مع أحد: وعلى ذلك لا يمكنهم أن يتصوروه كما تتصوره ، وبالتالي فإنهم يدللون بالنسبة له بطريقة مختلفة .

يقال إنه عندما أخبر المستكشفون الأوروبيون سكان المناطق الحارة بالشتاء في نصف الكرة الشمالي ، وقالوا لهم إن الماء يصبح كالبحر ، ويتمكن الناس من المشي عليه ، عندما أخبروهم بذلك قوبلوا بعدم تصديق مؤدب . كان الوطنيون ينظرون إلى أمواج البحر الدافئة وهي تمخر تحت أشجار النخيل ورفضوا أن يصدقوا وجود الثلج . كان ذلك بعيدا عن خبرتهم وإن تعودوا سماع قصص الرحالة .

يقع الناس غالبا في أخطاء عندما يدللون بالنسبة لأشياء لم يروها قط . يتخيل الأطفال الملوك وعلى رؤسهم التيجان ، مع أن الأكثر احتمالا في الحياة الفعلية هو أن يلبس الملوك غطاء عسكريا للرأس أو قبعة . قبل أن تصنع القاطرات الأولى ، كان الناس يرفضون تصديق أنها ستعمل . كانوا يظنون أن العجلات ستزلن وأن القطار سيظل ساكنا . وقد ذهب شخص معين اسمه السيد بلنسكنسوب بعيدا إلى حد اختراع قاطرة عجلاتها مزودة بمسامير للتغلب على هذه الصعوبة الخيالية تماما .

وإذا تنبأ شخص في سنة ١٧٠٠ بما سيكون عليه العالم اليوم ، فمن المؤكد أنه كان سيعتبر مجنونا .

ومهما يكن من شيء فالنصور لا يعطى دائماً الجواب الصحيح .  
والحق أن في إمكاننا أن ندلل تدليلاً صحيحاً على الأشياء التي لنا  
بها سابق خبرة أو التي تشبه بدرجة معقولة الأشياء التي نعرفها  
جيداً . على أنه إذا أدى بنا تدليلنا إلى نتيجة غير صحيحة ، فإن  
الخطأ يقع في هذا التدليل ، ومن ثم يجب أن نراجع الصورة في  
عقولنا وتتعلم أن نتصور الأشياء كما هي .

وحين نجد أنفسنا عاجزين عن التدليل ( كما يحدث كثيراً  
عندما تقابل الإنسان مسألة في الجبر مثلاً ) فإن السبب في ذلك  
هو أن تصورنا لم يتحرك . فالإنسان لا يستطيع البدء في التدليل  
إلا عندما تتكون صورة واضحة للمشكلة في خياله . ومن ثم  
فالتعليم السيء هو التعليم الذي يعطى عدداً لا نهائياً من العلامات  
التي لا معنى لها ، والكلمات والقواعد دون أن يحرك الخيال .  
الهدف الأساسي من هذا الكتاب ليس هو تفسير الطريقة  
التي يمكن أن تحل بها المسائل ، وإنما هدفه هو بيان ماهية  
المسائل الرياضية .

## التجريب

دعنا ندرس الآن مثالا للجدول أساسه أشياء مما يراها كل شخص ، ويمكنه أن يتصورها تصوراً صحيحاً . محطتان للسكك الحديدية ١ ، ب متصلتان بخط حديدي فردي ونتيجة لخطأ ما ، تحرك قطار ١ متجهاً إلى ب في نفس الوقت الذي تحرك فيه قطار آخر من ب متجهاً إلى ١ . لا توجد إشارات أو أجهزة أمان على الخط سنتوقع حدوث تصادم إلا إذا حدثت ظروف استثنائية ( مثل هبوب عاصفة تقطع الخط ) .

ستوافق على أنه من الممكن لك أن تصل إلى هذه النتيجة باستخدام خيالك ولكن لاحظ الصورة القائمة التي أعطاها لك خيالك . في أي نوع من البلاد تصورت أن هذا الخط موجود ؟ بين غابات ، أو مدن أو على قمة جبال ؟ هل وجدت صورة واضحة في عقلك لحركات المكابس والآلات الكثيرة الصغيرة الموجودة بعجلات القاطرة ؟ ماذا توقعت أن تكون التعبيرات المرسومة على أرجه السائتين ولون شعرهم وتكوين أجسامهم ؟ هل تصورت أن القطارين قطارا ركاب أم بضاعة ؟ يمكن أن

يستمر الإنسان في ذلك إلى الأبد . ومع ذلك فمن المؤكد أنه مهما كان خيالك حياً واسعاً فإنك ستفنى بعض النقط ، ولكن ذلك لن يؤثر على الإطلاق على إجابتك عن السؤال : هل سيحدث تصادم ؟ إذا كنت قد فكرت في القطارين كخريزتين تتحركان على سلك ( وحركة القطارين يمكن توضيحها جيداً بهذه الطريقة لو وضع جدول لحركتهما ) ، فإنك ستصل إلى نفس النتيجة . يكفي لهذه المسألة أن نعتبر أن القطارين خريزتان وأن الخط الحديدي سلك . وطبعاً بالنسبة لأغراض أخرى — مثلاً إذا كان عليك أن توضح وجود عربات الإسعاف للجرحى أو إذا أردت أن ترسم صورة للحادث — سيكون من الضروري أن تعرف تفاصيل أكثر .

من المستحيل تصور حدث بتفاصيل كاملة . عند مواجهة أية مسألة ، نقوم بتبسيط الظروف لحد معين . لانهم بالحقائق التي تبدو غير هامة . ونتيجة الإدراك ستكون صحيحة إذا كانت الصورة الموجودة في الخيال ، ليست صحيحة تماماً ، وإنما صحيحة بدرجة كافية للغرض الموجود أمامنا .

وعملية نسيان التفاصيل غير المهمة هذه تعرف بالتجريد وبدون التجريد يكون التفكير مستحيلاً . إذا حاولنا أن نحصل



### مراحل التجريد

- (١) صورة تقريبية للمنظر كما قد توجد في خيال شخص.
- (٢) شكل بدون تفاصيل إلا التي تلزم لغرض معين؛ وهو إظهار أن القطارين على وشك أن يتصادما .
- أغلب الأشكال في الرياضة تشبه الشكل ٢ . تترك جميع التفاصيل فيما عدا ما يلزم لغرض معين . ولكن وراء كل شكل من هذا النوع توجد صورة تشبه (١) .
- إذا أمكنك أن تكتشف ماهية هذه الصورة ، ستجد أن من السهل جداً فهم الشكل .



على صورة كاملة لحدث حتى ولو كان بسيطاً فإننا سنكون مضطرين لإضاعة عمرنا في جمع المعلومات . وبعض الناس الذين لم يتعلموا تعليماً سليماً يقاطعون أية مناقشة معقولة باستمرار صائحين « ولاكنك لم تعرف بالضبط ماذا تعنيه بهذه الكلمة » لا يمكن تعريف الأغلبية العظمى من الكلمات بالضبط ( مثلاً الكلمة أحمر ) . الأمر المهم ليس التعريف المضبوط وإنما أن تعرف عن أى شيء تتكلم .

ينشأ كثير من سوء الفهم الخطير إذا نسي الإنسان طبيعة التجريد وحاول أن يطبق صورة للكون صالحة لغرض معين لا لتحقيق غرض آخر لا تكفي هذه الصورة لتحقيقه على الإطلاق، وفي هذا المقام نستطيع أن نسوق مثالين على الصعوبات التي تنشأ نتيجة لذلك .

### وجهة النظر الميكانيكية للحياة

في حقبة من الزمان طغى على الناس ولع جنوني غايته تفسير كل شيء بدلالة الآلات . فقد اكتشف أن حقائق كثيرة من حقائق الطبيعة وعلى الخصوص حركات الكواكب والمد والجزر والأجسام الصلبة على سطح الأرض يمكن تفسيرها باعتبار أن الكون مصنوع من كريات صغيرة صلبة تجذب بعضها البعض تبعاً لقوانين معينة محددة ، وبدلاً من أن يكتفى بالقول بأن لدينا نظرية

صحيحة بدرجة كافية لغرض معين ، قفز الفلاسفة والعلماء إلى نتيجة أعم فقالوا إنهم قد توصلوا إلى معرفة الحقيقة الكاملة للكون . ولم يكتفوا بالقول بأنهم توصلوا إلى معرفة حقيقة الشمس والقمر ، وأنهما مصنوعان من هذه الكرات بل زادوا فقالوا إن عقولنا أيضاً مصنوعة من هذه الكرات الصغيرة الصلبة ، وكل ما نفعله هو نتيجة للطريقة التي تجذب بها هذه الكرات بعضها بعضا . وبالتالي فإن التفكير والشعور يجب أن يكونا مجرد خداع ، هذا على الرغم من الحقيقة البارزة وهي أن هذه النظرية نفسها قد توصل إليها نتيجة للتفكير .

ولاشك أن الطريقة التي اتبعت للوصول إلى هذه النتيجة طريقة غير علمية . ذلك أن من الواضح لأي إنسان أن الشجاعة والإخلاص والتصميم والحب هي حقائق مثلها في ذلك مثل الأوزان أو الموازين . بدون هذه الصفات يكون من غير المحتمل على الإطلاق أن يستمر جنس من البشر أو الحيوانات في البقاء طويلا . الاستنتاج العلمي هو : تعطينا نظريتنا نتائج صحيحة عن حركات القمر والكواكب ، وبالتالي يوجد بعض المصدق فيها ، ولكننا لا تؤدي بنا إلى التنبؤ باحتمال تجمع الذرات وتظيمها لتكون الكائنات الحية ، وبالتالي فهي نظرية غير كاملة ، نظرية لا تأخذ في اعتبارها بعض الأمور التي تقوم بها الذرات فعلا .

ربما تكون جذور هذه المسألة واقعة في الشعور الخرافي بأن  
النتائج التي نحصل عليها بالنظر خلال ميكروسكوب أو تلسكوب  
تتفوق بكثير على المعرفة التي نحصل عليها في حياتنا اليومية . لقد  
ذهبنا في بعض الأحيان بعيداً إلى حد تقديس العلماء والاعتقاد  
بأن الرجال الذين يشتغلون في المعامل يمكنهم حل جميع مشاكلنا .  
حقاً إن آراء عالم عظيم عن العلم الذي يشتغل به هي آراء جديرة  
بالاحترام ، وذلك لأنها مبنية على الحقائق . ولكن بمجرد أن يغلق  
العالم نفسه داخل معمله يكون قد ابتعد كثيراً عن الحياة اليومية  
للإنسان . إذا تحقق عالم من ذلك ، وإذا حاول أن يتغلب على عزله  
ببذل اهتمام خاص بالأحداث الجارية ، وبدراسة تاريخ البشرية فإنه  
قد يتمكن من تطبيق خبرته العلمية لنواح أخرى من الحياة . أما  
إذا أسرع مباشرة إلى معمله مملوئاً ، مثل أي إنسان آخر ، بالتعامل  
والجهل ، فالاحتمال كبير في أنه سيجعل من نفسه مغفلاً .

### خطوط إفايدس المستقيمة

المبتدئون في الهندسة يدهشون في بعض الأحيان عندما يقال  
لهم إن الخطوط المستقيمة ليس لها سمك . يقال لنا ، إننا لن نجد  
على الإطلاق خطأ مستقيماً في الحياة الفعلية ، وذلك لأن كل شيء  
حقيقي له سمك معين . ومع ذلك فإن الخط الواحد من خطوط

وهذا يشير إلى أن الرياضة البحتة تظهر أولاً كدراسة للطرق والوسائل . والحق أن علماء الرياضة البحتة لم يظهروا في التاريخ الإنساني إلا متأخرين : فهم يمثلون مستوى عالياً من الحضارة . يأتي الرجال العمليون أولاً ، وهم الذين يدرسون العالم كما هو ويكتشفون الطرق التي تفيد عملياً . لا يدرس علماء الرياضة البحتة العالم الطبيعي . فهم يجلسون ، كما كان الحال عليه ، في المكتبة في الطابق الأعلى . ويدرسون ما كتبه الرجال العمليون . وفي بعض الأحيان يثق الرجال العمليون بصحة طريقة ما تعطى النتيجة الصحيحة عادة ، ولكن ليس دائماً ( انظر الباب الرابع عشر ) . وظيفة عالم الرياضة البحتة عندئذ هي فصل الطرق المنطقية ( أي التي تعطى النتائج الصحيحة ) عن الطرق غير المنطقية .

علماء الرياضة البحتة متصلون بالعالم الواقعي ولكن في الخطوة الثانية ، إنهم لا يجلسون منعزلين ويفكرون . المادة التي يدرسونها تتكون من الكتب الموجودة في مكتبات العالم . وهذه الكتب لا تقتصر فقط على كتابات المهندسين . عادة تكون السلسلة طويلة جداً . يستشير المهندس رياضياً تطبيقياً ، ( عالم الرياضة الذي يدرس الرياضة للمسائل التي تنشأ في الحياة اليومية ) : الرياضي التطبيقى يستشير رياضياً بحثاً : الرياضي البحت يكتب بحثاً عن المسألة : ورياضي بحث آخر يشير إلى أنه يمكن حل المسألة إذا



نحن عرفنا فقط حل مسألة عامة أكثر من الأولى ، وهكذا تستمر السلسلة . وتذشأ مادة منشورة واسعة تبين الارتباط بين المسائل المختلفة . يصبح الموضوع كبيراً بدرجة أنه يستحيل تذكر كل ما كتب عنه : وتصبح الضرورة ماسة لأن تركيز جميع النتائج المختلفة في عدد قليل من القواعد . بعد قرن أو قرنين تبحث مسائل يبدو ألا علاقة لها بما يشغل المهندس الأول . ولكن الارتباط موجود حتى ولو كان من الصعب رؤيته .

هل الرياضة البحتة إذن هي مجرد دراسة الكيفية التي يفكر بها الرياضيون ؟ من المؤكد أنها ليست كذلك . لا يهتم علماء الرياضة البحتة إلا قليلاً جداً بالكيفية التي يفكر بها الناس فعلاً . إذا فقد جميع الرياضيون التطبيقيون عقولهم فجأة ، فإن الرياضة البحتة ستبقى دون تغيير . الرياضة البحتة هي دراسة الكيفية التي يجب أن يفكر بها الناس لكي يحصلوا على النتائج الصحيحة . وهذا العلم لا يأخذ في حسابه نقط الضعف في الإنسان . وربما يكون من الأصديق أن نقول إن الرياضة البحتة هي دراسة الكيفية التي يجب أن نصمم بها الآلات الحاسبة ، إذن نحن قررنا عدم الاستعانة على الإطلاق بالرياضيين من البشر .

تبدو الرياضة البحتة مقبولة لهؤلاء الذين يتفوقون مع روبرت بروك في تقدير :



« الجمال الهادى » لآلة جبارة ، ولكن هذا التدقيق يأتى متأخراً  
سواء فى تاريخ الجنس البشرى أو فى حياة معظم الأفراد . وإذا  
كان التعليم هو الهدف ، فمن الضرورى أن نتقن الطرق البدائية  
للرياضيين العمليين قبل محاولة إدخال الطرق المضبوطة الرياضية  
البحثية . هذا الكتاب يهتم فى الدرجة الأولى بالرياضة العملية ،  
وليس السبب فى ذلك أن الرياضيين العمليين يمكنهم الادعاء بأى  
تفوق على علماء الرياضة البحثية ، ولكن السبب هو مجرد أن خبرة  
التدريس أظهرت ضرورة ذلك .

وأيضاً أنا لا أدعى أن وجهة النظر التى اقترحتها عن الكيفية  
التي يتمكن الناس بها من الجدل ، لا أدعى أن وجهة النظر هذه  
غير معرضة للخطأ . إن الوقت الذى أنفقته فى دراسة تاريخ  
الرياضة ، وتاريخ البشر على العموم ، لم يكن بالطول الذى أوده .  
وأنا أعتقد فقط بأن وجهات النظر هذه هى فى الاتجاه الصحيح .  
ولكنى أعرف من خبرتى المباشرة أن أغلب بنى البشر يفكرون  
وأنهم يحتاجون للتعليم ، وهذان أمران تؤدى بنا هذه النظرية  
إلى توقعهما .

### النتيجة العملية

نلخص ما سبق : الإدراك الناجح لا يكون ممكناً إلا عندما

يكون لدينا صورة واضحة في عقولنا عن الشيء الذي ندرسه . يتكون التصور ، ويصبح جديراً بالاعتماد عليه ، من خلال الاتصال العملي بالعالم الواقعي . وتكون الرياضة صعبة عندما تعرض كأمر منفصل تماماً عن حياتنا اليومية . يمكن الإدراك الرياضي أن ينمو بالتدريج وبطريقة طبيعية من خلال اشتغالنا عملياً بأشياء حقيقية . وهذا صحيح بالنسبة للرياضة العالية ، كما هو صحيح بالنسبة للرياضة الأولية . وفقط الرياضة البهتة في أعلى درجاتها هي التي اتصالها بالحياة اليومية اتصال غير مباشر لدرجة ما .

**\*\* معرفني \*\***

**[www.ibtesama.com](http://www.ibtesama.com)**

**منتديات مجلة الابتسامه**

## الباب الرابع

### رسم خطة الدراسة

« لقد علمت الرياضة والعلم التطبيقى أو الهندسة لجميع أنواع الأولاد والرجال تقريباً . ومن خبرتى أعتقد أنه يندر أن يوجد رجل يستحيل عليه أن يكون مكتشفاً ، وعاملاً على تقدم المعرفة ، وكلما كان السن الذى تعطى له فيه الفرص لإظهار شخصيته وتجربتها مبكراً كان ذلك أفضل ، — جون بيرى عام ١٩٠١ »

والشرطان الأساسيان للنجاح فى أى نوع من أنواع العمل هما الاهتمام والثقة . وعادة لا يهتم الناس كثيراً بهذين العاملين لأنهم يشعرون ( بحق ) بأنهم لن يستطيعوا أن يولدوا فى أنفسهم الثقة أو الاهتمام عن طريق الإرادة .

حقيقة أنه يمكنك أن تزيد الثقة بالإرادة والعزم . ولكن لا يمكنك أيضاً بالتصميم أن تزيد من حجم عضلاتك ، أو تجعل ضربات قلبك تسرع إذا أنت اكتفيت بالجلوس على مقعد . وهذا لا يعنى أن من المستحيل تغيير قوة عضلاتك أو معدل ضربات قلبك . إذا أنت جريت لمدة نصف ساعة فإنك ستصل إلى كل من هذين الأمرين .

يمكن أيضاً تغيير الثقة والاهتمام باتخاذ الخطوات المناسبة .  
والخطوات المناسبة ليست هي الإسراف في العمل ذلك أن من  
المعلوم جيداً أن الإسراف في التمرينات الرياضية يؤدي إلى تحطيم  
الجسم بدلاً من بنائه . ونفس الأمر صحيح بالنسبة للعقل

في التمرينات الرياضية لا يسيطر العقل الظاهر على بعض  
الأعضاء المهمة . ولا يمكننا أن نصدر أوامر مباشرة للعقل  
أو الكبد أو الغدد . فيجب علينا أن نجد تمرينات تتوقف على  
حركات الأطراف وعلى المجهودات التي تبذلها العضلات التي يمكن  
التحكم فيها ، بحيث تسبب هذه التمرينات النتائج التي نرغب فيها  
بالنسبة للأعضاء الأخرى . وبعد أشهر قليلة من التمرين المناسب  
نشعر بالفائدة ، وبأن تغييرات لا بد أن تكون قد حدثت  
في أجسامنا بالرغم من أننا لا نعلم ماهية هذه التغييرات .

وفي التمرين العقلي أيضاً ، نجد أن التغييرات الحاسمة تحدث  
لا شعورياً ، واختبار أية طريقة للتعليم لا تتمثل في استطاعة  
التلاميذ إجراء حيل معينة ، كما هو الحال مع الكلاب . ومثل هذه  
الطريقة عديمة الجدوى بل ومهينة من أساسها . فهي تمكن الناس  
فقط من النجاح في امتحانات مواد لا يفهمونها ، ومن أن يصبحوا  
مؤهلين لوظائف لن يكرنوا سعداء أو أكفاء فيها . الاختبار  
الحقيقي لأية طريقة تعليمية هو أعمق من هذا بكثير . بالمعالجة

الصحيحة ، يجد الطالب شعوره نحو الموضوع آخذ في التمدد ، ويبدأ الطالب في فهم الأمور التي يشملها الموضوع ، ويشعر بثقة في أنه سيتمكن من السيطرة عليها ، ويبدأ بالشعور بالسرور من عمله ، ويأخذ في التفكير في هذا الموضوع في غير ساعات العمل ولا يمكن للعقل أن " يمسك " ، فغلا بالموضوع إلا عندما يوجد مثل هذا الاتجاه . فالناس يظهرون درجة من الذكاء والمعرفة بالنسبة لهواياتهم أعلى منها بالنسبة لأي جانب آخر من الحياة .

### عدم الاهتمام

هل في الإمكان تحويل نوع من الاهتمام الذي نشعر به نحو هواية ما ونستخدمه في العمل ؟ يتوقف ذلك على السبب الذي من أجله نشعر بعدم الاهتمام .

يوجد أشخاص يتركز اهتمامهم في موضوع واحد . إذا كنت تشعر بأن لك هدفاً واحداً في الحياة سواء كان ذلك الرسم أو البحث عن علاج للسرطان — إذا كنت تشعر أن هذا الشيء هو وحده الذي يهيك أكثر من أي شيء آخر — أكثر من الراحة ، أو الثروة ، أو الاحترام ، أو الأمان ، أو الارتباطات العائلية ، والواجبات الاجتماعية ، وإنما جميعاً لا مغزى لها بالمقارنة



به — إذا كان هذا هو الأمر فمن المؤكد أنه لا يوجد لديك أى شك فيما يجب عليك عمله .

ولكن عدد الناس المحددى بالأهداف بهذا الشكل قليل جداً . فأغلب الرجال والنساء مستعدون لأن يتكيفوا وفقاً للعادات التى يجدر بها حولهم ، وأن يشتغلوا فى أية وظيفة يمكنهم دخولها من المعيشة عيشة معقولة .

ومن المحتمل أن هناك أشخاصاً آخرين يقعون بين هاتين الفئتين . أشخاصاً يصبحون سعداء أو أكفاء فى اتجاه خاص من الحياة ، وتنقصهم المعرفة الذاتية ، أو الشجاعة ، أو التصميم لى ينفصلوا عن نوع الحياة التى يتوقع غيرهم من الناس منهم أن يحيوها . لقد نتج عن الحرب حالات كثيرة ، نجد فيها أشخاصاً كانوا من قبل يبذلون جهوداً متلكئة لى يتأهلوا لوظائف علمية ، نجدهم وقد أخذوا يقومون بمهام عملية مثل إطفاء الحرائق وقيادة اللوريات وهكذا فمن الواضح أنهم وجدوا نوع العمل المناسب لهم . وفى عالم مثالى ، سيشجع هؤلاء على القيام بمثل هذه الأعمال دون أن تكون هناك ضرورة لإشغال الحرب . . . والمشكلة بالنسبة لهؤلاء الأفراد ليست الكيفية التى يتعلمون بها الرياضة وإنما كيف يتركون الرياضة فى أول فرصة ممكنة .

وعلى ذلك فهذا هو أول سؤال تسأله لنفسك : إلى أى نوع

تنتمى ؟ هل أنت شخص يهتم اهتماماً خاصاً بنوع معين من النشاط بحيث يمكنك ترك الموضوعات الأخرى ( بما فيها الرياضة ) وأن تنجح كخبير إحصائي ؟ أم أنك تنتمى إلى النوع الأكثر ذيوفا ، أى النوع المستعد لأن يحاول أى موضوع يقابله ؟

يجب عليك أن تقرر بالتحديد أحد هذين الطريقتين . فإما أن تكون رغباتك بعيدة عن الرياضة بدرجة أنك لن تتمكن على الإطلاق من الاستفادة من الرياضة أو التمتع بها ، أو أنه يوجد شيء تعتقد أنه يستحق العمل فيه وتكون معرفة الرياضة ضرورية له . عند الإجابة عن هذا السؤال يجب أن تأخذ في حسابك الحقيقة التي ذكرناها فيما سبق وهي أن نظام التعليم - فيما يبدو - مصمم بحيث ينتزع كل حيوية واهتمام من المواضيع التي تدرس . على أن الذي نعتنيه بالرياضة هو الموضوع الحي ، وليس ما يدرس في مدارس كثيرة .

وعلى ذلك ، ففي بعض الأحيان يرجع عدم الاهتمام إلى الشخصية . ولكن الأغلبية العظمى من الناس الذين يكرهون الرياضة لا يسرى عليهم هذا الوصف . وأكثر الأسباب شيوعاً لهذا الكره هو الطريقة التي تقدم بها الرياضة . يمكنك اختبار ذلك بنفسك : هل تحب الألغاز ؟ هل تستمع إلى البرامج الإذاعية التي يجيب فيها أشخاص أكفاء على الأسئلة العويصة ؟ هل تقوم

يحل ألغاز الكلمات المتقاطعة ؟ هل تلعب البريدج أو الشطرنج أو الطاولة ؟ هل تشترك في المناقشات الحامية التي نسمعها في بعض الأحيان مثل التساؤل عما يحدث إذا قذف ركاب سيارة بكرة رأسياً في الهواء — هل ستعود الكرة ثانية إلى السيارة ؟ هل تهتم بأي نوع من أنواع التطور العلمي أو الميكانيكي مثل الرادار أو الطيران ؟ إذا كان هذا هو الحال فإنك لا تختلف عن الرياضي إختلافاً كبيراً في أساس ما يثير اهتمامك . أعرف أسرة ( ليست ذات ثقافة عالية ) انقسمت في أحد أعياد الميلاد إلى عدة فرق ثائرة على بعضها ثورة شديدة ، وذلك بسبب مسألة السيارة والكرة . وفي المدرسة ، كان أكثر الأطفال تمسكاً بحلولهم لمثل هذه المسائل هم الأطفال العاديون جداً . هذا الاهتمام بما قد يحدث هو قريب بالاهتمام الذي يشعر به العالم ، والعلم يقودنا بسرعة للرياضة .

### إبعاد الخوف

من المحتمل أن أغلب الناس سيهتمون بالرياضة ، كما يهتم أغلبهم بالموسيقى ، وذلك إذا لم يخافوا منها . الاهتمام والثقة مرتبطان ارتباطاً وثيقاً . إذا أنت وجدت أنك تستطيع عمل شيء فإنك ستسر . وستحب الشعور بأنك سيطرت على الطبيعة ،

والشعور بأن غيرك من الناس سيعجب بك . سيدفعك لأن تعمل أكثر في هذا الموضوع ، وكلما عملت أكثر تحسنت . ومن ناحية أخرى إذا بدأت بفشل ، فإن تأثير ذلك يكون عكس ما سبق . لا يوجد شخص يحب أن يبدو مغفلاً . ستجنب الموضوع أو ستحاول أن تبدو أنك لا تهتم به . وستصل إلى قرار بأنك لن تنجح أبداً فلماذا تضيع طاقتك ؟ وعلى أية حال ستقنع نفسك بأنه لا جدوى من العمل . وجميع هذا لا علاقة له بحقائق الحالة: المحاولة اليائسة لعقل بشرى للمحافظة على توازنه واحترامه الذاتي . ومن المحتمل أنك ستركز اهتمامك على موضوع آخر ، أو أن تؤدي إحدى الألعاب بعنف وتقول لنفسك : « حسناً ، قد لا أسطيع دراسة الجبر ، ولكني أهتم كثيراً بكرة القدم والكيمياء » .

في بعض المدارس يتبع أسلوب ممتاز عندما يفشل تلميذ تماماً في الدروس ، وهو أن يوجه التلميذ إلى بعض النشاط المفيد مثل التجارة أو الزراعة . عندئذ يتأكد التلميذ من أنه يمكنه عمل شيء ما جيداً ، ولكن يكون محتاجاً بعد ذلك لأن يخدع نفسه بالنسبة لدروسه . يمكنه أن يخاطر بالمحاولة الجديدة للنجاح حيث أن ثقته بنفسه لن تذهب إذا هو رسب .

وعند محاولة التغلب على الخوف من موضوع يكون من

الضرورى أن تتحقق من هدفك الأول . ليست مهمتك الأولى هي أن تحفظ أية نتيجة معينة ، وإنما هي أن تتخلص من الخوف . يجب عليك أن ترجع إلى الوراء مرحلة معينة ، وتبدأ بعمل تكون متأكداً تماماً من أنك تستطيع القيام به . فمثلاً عند تعلم لغة أجنبية ، يكون مما يساعدك أن تحصل على كتاب مكتوب بهذه اللغة للأطفال الذين يبدأون في تعلم القراءة . مهما كان سوء طريقة تعليمك فمن المؤكد أنك تستطيع قراءة هذا الكتاب . هذا هو أول نصر لك . لقد قرأت كتاباً كتب لكى يستخدمه شخص يتكلم لغة أجنبية .

وفي الرياضة أكثر من غيرها ، الرجوع لمرحلة سابقة أمر هام . فمن المستحيل فهم الجبر إذا لم يتمكن الإنسان تماماً من الحساب ، ومن المستحيل فهم حساب التفاضل إذا لم يتمكن الإنسان تماماً من الجبر . إذا حاولت المستحيل دون أن تتحقق مما تفعله فإن روحك المعنوية ستعاني .

وفضلاً عن هذه الصورة المنطقية يوجد أيضاً سبب نفسى . الاحتمال كبير فى أنك لا زلت تحتفظ بشعور الشك الذى كابدهته خلال جميع المراحل المختلفة لتعليمك : لا زلت تشعر بالعقبات التى قابلتك عندما كنت فى الثامنة أو التاسعة من عمرك . هذا الشعور سيختفى على الفور إذا أنت عدت إلى الوراء وقرأت الكتب التى



كانت مقررة عليك عندئذ . وغالبا ستجد أن الصعوبات قد تلاشت  
دون أن تتحقق من ذلك .

ولهذا السبب توجد في هذا الكتاب أبواب تعالج موضوعات  
مثل جدول الضرب . ستقرأ هذه الأبواب بدون صعوبة . وفي  
مرحلة معينة من الكتاب ستجد نفسك أمام ألغاز مرة أخرى .  
وهذا يعني أنك قد وصلت إلى المرحلة التي تبدأ فيها معرفتك  
بالموضوع تتخللها ثغرات . وعند هذه النقطة أو عند نقطة سابقة  
يجب أن تبدأ مراجعتك وأن يجد الإنسان نفسه حائرا أمام  
الاشياء التي تعلمها تروا هو أمر عادي جدا . وإذا دأبت على المراجعة  
وكان كل ما قمت به في الستة أشهر السابقة أو العام السابق واضحا  
تماما بالنسبة لك فلا يوجد داع للقلق أو عدم الاطمئنان .

إحدى الطرق الجديدة للمراجعة هي أن تأخذ كتابا مقررا  
وتحاول حل الأمثلة المعطاة فيه . إذا أمكنك حل هذه الأمثلة بسهولة  
فليس من الضروري قراءة الكتاب . وقد تجد صعوبة في الأمثلة  
الخاصة ببعض الأبواب . وإذا كان الكتاب المقرر هو كتاب  
قراءته لأول مرة من عدة سنوات مضت ، فإنك غالبا ستعرف  
ما إذا كانت نتائج هذه الأبواب المعينة تستعمل بكثرة في العمل  
التالي . إذا كان هذا هو الحال فإنك تكون قد وجدت سبب

الصعوبة التي قابلتك في هذا العمل التالى . أما إذا لم يكن الحال كذلك فتستطيع أن تتركها في الوقت الحالى .

وفي الرياضة يكون من الضرورى فى كثير من الأحوال أن ترجع فى أثناء عمالك إلى الوراء . إذا وجدت صعوبة فى صفحة ١٥٧ من كتاب ما ، حاول أن تجد السبب فى ذلك . ابحث فيما إذا كانت صفحة ١٥٧ تستخدم نتائج صفحات أخرى سابقة من الكتاب ، أو تستخدم حقيقة ما مشروحة فى كتاب مقرر آخر سابق لهذا الكتاب . فإذا كانت صفحة ١٥٧ تعتمد صفحات ٩ ، ٣٢ ، ١٢٨ اقرأ هذه الصفحات مرة أخرى وتأكد من فهمك لها . إذا لم تستطع فهم هذه الصفحات فلن يمكنك طبعا فهم صفحة ١٥٧ .

إذا كان الأمر لا يزال صعبا فاسأل شخصا آخر لشرح لك الصفحة . لاحظ جيدا ما إذا كان يستخدم أية كلمة أو أى علامة أو أى طريقة تكون غريبة بالنسبة لك . إذا كان الأمر كذلك فاسأله أين تجد شرح هذه الكلمة أو العلامة أو الطريقة .

إذا أمكنك أن تعثر على ماهية صعوبتك فإنك تكون قد قطعت نصف الطريق نحو التغلب عليها . يسير الناس فى كثير من الأحيان وفى رسمهم ضباب من الصعوبات التافهة : ليسوا متأكدين تماما مما تعنيه الكلمات ولا عما حدث قبلا ولا من الغرض من العمل . ويمكن التغلب على جميع هذه الصعوبات بسهولة إذا أخذت

واحدة فواحدة. تكفى خمس دقائق مع الاستعانة بقاموس للتغلب على هذه الصعوبة بفرض أن الكتاب مكتوب بلغة بسيطة <sup>(١)</sup>.

الامر الثانى هو أن تعرف مما هى المعلومات التى يفترض أن تكون ملما بها قبل أن تحاول أن تفهم برهان نتيجة جديدة. ومن الممكن عمل شكل يبين الارتباط بين أجزاء كتاب ، أى كيف يعتمد جزء منه على الأجزاء السابقة يجب على الإنسان أن يدرس الكتاب فى الاتجاهين ، يجب عليه أن يعرف أن النتيجة الموجودة فى صفحة ٥٠ برهن عليها بواسطة النتيجة الموجودة فى صفحة ٢٩ ، وأما أى النتيجة الموجودة فى صفحة ٥٠ ستستخدم فى برهان النتيجة الموجودة فى صفحة ١٤٤ . ( بالطبع أى شخص عاقل لن يحفظ أرقام الصفحة الفعلية الموجودة بها النتائج ، ولكن قد يكون من المفيد أن تكتب فى هامش صفحة ٥٠ وانظر ص ٢٩ ، مستخدمة فى ص ١٤٤ . كثير من الناس يحفظون نتائج كثيرة ولكنهم لا يربطون بينها أبداً بهذه الطريقة .

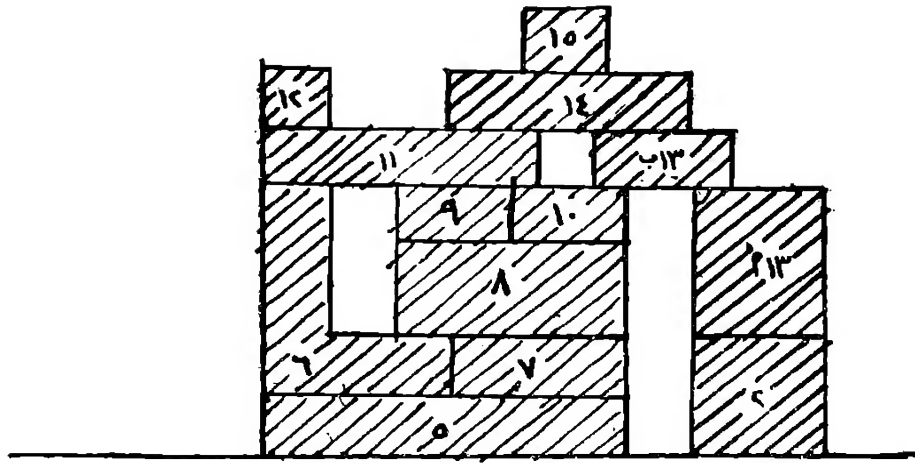
لم يكن فى الاستطاعة فى هذا الكتاب أن نعطى مراجع عن كل جملة لجميع الملاحظات التى ذكرت فى مواضع سابقة من الكتاب

---

(١) لقد حاولت أن أجمل الكلمات فى هذا الكتاب قصيرة بقدر الإمكان . وقد توجد كلمة أو كلمتان لا تكونان معروفين للجميع . ومن العدل أن يبذل القراء جهداً ويبحثوا عنها فى القاموس .

والتي قد تساعد على الفهم . إذا لم تستطع فهم أية جملة فضع خطأ أسفلها . من المحتمل جداً أنه توجد ملاحظة في موضوع سابق من الباب أو من الكتاب قصد بها خصيصاً أن تعد للجملة الصعبة . ربما يكون قد فاتك تماماً ملاحظة هذه العبارة عند أول قراءة . كانت تبدو ولا فائدة منها . ابحث في الجزء السابق من الكتاب عن مثل هذه الملاحظات . إذا نجحت في العثور عليها ، فاكتب مذكرة في الهامش وهذا يوضح الجملة الموضوع تحتها خط في صفحة . . . . .

قد يبدو لك أن هذه النصيحة ليس فيها الكثير وأنها ظاهرة ولا تحتاج للذكر . قد تكون ظاهرة ولكن يلزم كثير من الاقناع للناس حتى ينفذوها . المعتاد هو أنه إذا وجد شخص صعوبة في حساب التفاضل والتكامل أو حساب المثلثات فإنه لا يكون مستعداً لأن يصدق أن المشكلة الحقيقية هي الجهل بالجبر أو الحساب . يوجد دائماً امتحان سيأتي بعد ستة أسابيع أو بعد عام أو أية فترة أخرى ، وهذا الامتحان هو في حساب التفاضل والتكامل أو في حساب المثلثات وليس في الجبر والحساب محاولة دراسة الرياضة العالية دون السيطرة التامة على الجزء السابق هي مثل محاولة اختراع طائرة بدون معرفة أى شيء عن محركات السيارات . لقد فشلت جميع محاولات صنع الطائرات فشلاً ذريعاً إلى أن تطورت صناعة السيارات . تستغرق مراجعة الرياضة الأولية وقتاً أقل بكثير مما يتصور الناس .



### الخطة الأساسية لهذا الكتاب

في هذا الشكل كل قطعة مظلمة تمثل باباً . الأبواب ١ ، ٣ ، ٤ هي ذات طبيعة عامة وليست متضمنة في الشكل .

كل قطعة تعتمد على القطع الموجودة تحتها . وبالتالي فن المستحيل فهم الباب الحادي عشر بدون قراءة الأبواب ٦ ، ٩ ، ١٠ ، والبابان التاسع والعاشر بدورهما لا يمكن فهمهما بدون الباب الثامن وهكذا . في بعض الحالات تعتمد القطعة الأعلى على جزء صغير من القطعة السفلى . فمثلاً يمكن فهم الباب الثامن بدون فهم جميع أجزاء الباب السادس . والواقع أن جزء الباب السادس الذي يلزم للباب الثامن هو الجزء الذي يشرح معنى العلامات ٣ ، ٤ ، ١٠ . وهكذا . وليس في الإمكان توضيح ذلك على الشكل .

الباب الثالث عشر مقسوم إلى جزئين ١٣ ١ يمثل الجزء الأكبر من الباب هو أولى للغاية ١٣ ب يمثل نهاية الباب وهو متقدم أكثر . إذا وجد قارئ صعوبة ، في الباب العاشر مثلاً ، فقد يكون من المجدي ترك الأبواب ١٠ ، ١١ ، ١٢ مؤقتاً وقراءة الجزء الأسهل من الباب الثالث عشر .



ما عدد الكتب المقررة التي استخدمها طالب في سن الثامنة عشرة ؟ كتاباً واحداً في الحساب وكتاباً واحداً في الجبر وربما عدة كتب في الهندسة وحساب المثلثات الأولى ، وربما أيضاً كتاباً في حساب التفاضل والتكامل . يمكننا ترك الهندسة جانباً مؤقتاً . ما الوقت الذي تستغرقه في كتاب عن الحساب وآخر عن الجبر ولتجد ما إذا كانت هناك أية نتيجة هامة فانتك وأنت في المدرسة ؟ ما الوقت الذي تستغرقه كتابة قائمة بمحتويات هذين الكتابين على ورقة ، ووضع علامة بجانب النتائج التي تفهمها جيداً ، ليس بالوقت الطويل . إن ميزة القيام بذلك هي أنك ستبدأ ترى ما عليك دراسته سواء أكان كثير أم قليلاً . يتجه الإنسان في تفكيره إلى أن الجبر حقل واسع مملوء بما يثير اللبس ، ويتخبط الواحد فيه دون دليل . من الأفضل بكثير أن تفكر في الجبر (أو جزء الجبر الذي يلزمك معرفته) كست طرق وعشرين نتيجة تقريباً ، ومن المحتمل أن تكون قد عرفت ٦٠٪ من هذه الطرق والنتائج فعلاً . وحتى ذلك لا يلزمك مراجعته بأكمله فوراً . افرض مثلاً أنك تجد صعوبة في حساب التفاضل والتكامل لأنك ربما لا تعرف نظرية ذات الحدين . أحضر كتاب الجبر وأبحث عن نظرية ذات الحدين . لا تهتم بالبرهان

فى الوقت الراهن . اجعل أولا ماهية نظرية ذات الحدين تتضح  
تماماً فى ذهنك . هذه النظرية مملوءة بالعلامات مثل  $n$  نفس أو  
( ن س ) — تستخدم علامات مختلفة فى الكتب المختلفة —  
هذه العلامات مشروحة فى باب التباديل والتوافيق . ومرة أخرى  
لا تهتم بالبرهان انظر ما تعنيه هذه العلامات . حل عدداً قليلاً  
من التمرينات —  ${}^n C_1$  ،  ${}^n C_2$  ،  ${}^n C_3$  مثلاً . أوجد كل من هذه  
كعدد . ارجع ثانية لنظرية ذات الحدين وخذ أمثلة خاصة لها .  
ضع  $n = 4$  مثلاً <sup>(١)</sup> . موضوع نظرية ذات الحدين هو العبارة  
( س + ١ )<sup>n</sup> . ضع س = ١٠ ، ١ = ١ ، احسب قيمة  ${}^{11} C_2$  ،  
 ${}^{11} C_3$  ، ما الارتباط بين  ${}^{11} C_4$  والأعداد التى حسبتها فيما  
سبق ؟ احسب قيمة  ${}^{101} C_1$  ،  ${}^{101} C_2$  ،  ${}^{101} C_3$  ،  
ما الذى تلاحظه  ${}^{11} C_1$  ،  ${}^{101} C_1$  ،  ${}^{11} C_2$  ،  ${}^{101} C_2$  ، ما الذى تلاحظه عن  
 ${}^{11} C_3$  ،  ${}^{101} C_3$  ،  ${}^{11} C_4$  ،  ${}^{101} C_4$  هل نفس الأعداد  
تظهر فى كل من الحالتين ؟ هل تظن أن نفس الأعداد ستظهر  
فى  ${}^{1001} C_1$  ،  ${}^{1001} C_2$  كما هى فى  ${}^{11} C_1$  ؟

وفى  ${}^{1001} C_3$  ،  ${}^{1001} C_4$  كما فى  ${}^{11} C_3$  ،  ${}^{11} C_4$  إذا

(١) إذا كنت من السعداء الذين لم يدرسوا الجبر أبداً ، وبالتالى ليس لديك أية  
أفكار مخطئة عنه ، لا تهتم بهذه الفقرة. معنى العلامات الجبرية مذكور فى الباب السابع

كان الأمر كذلك فإنك لست بعيداً عن اكتشاف نظرية ذات الحدين لنفسك . ( إذا كان ما يدل عليه ٤١١ غير واضح بالنسبة ذلك فإن الملاحظات السابقة ستكون بدون معنى . ما يدل عليه الرمز ٤١١ مشروح في الباب السادس . )

بهذه الطريقة ، أى باقتفاء الأثر إلى الوراء ، ستعرف أجزاء الجبر المفيدة في حساب التفاضل والتكامل . على الأقل ستعرف ماهى نظرية ذات الحدين . وكيف تساعدك على كتابة قيمة ( ١٠٠١ )<sup>٤</sup> حتى إذا لم تستطع برهان صحة ذلك . عندما يشير كتاب أو محاضر لنظرية ذات الحدين ، ستتمكن من متابعة ما استخدمت فيه . وعندما تصبح فائدة ومعنى نظرية ذات الحدين مألوفين لديك تماماً فربما يكون من المجدى لك أن ندرس البرهان . ( بعض الكتب تحتوى على براهين لا تثير الاهتمام على الإطلاق . ابحث عن كتاب يكون البرهان الموجود فيه قصيراً ومقبولاً لك ) .

### القراءة بهدف

كنا الآن نستخدم كتاباً في الجبر بطريقة خاصة — بهدف . لم نحاول قراءة الكتاب كله . لم تهتم إلا بالأبواب الضرورية لفهم نظرية ذات الحدين . قد لا تظن أن هذا الهدف شيء مهم ، ولكنه

أفضل من لا شيء على الإطلاق . ستدهش كيف يبدو كتاب مقرر معقولا أكثر إذا أنت استخدمته بهذه الطريقة . يستحوذ عليك اهتمام محدد للحصول على هذه المعلومات — ستوفر عليك أى تأخير فى عملك . أنت لا تملأ عقلك دون نظام بجميع المعلومات الموجودة فى الكتاب . أنت تدرس فقط الأشياء التى تحتاج إلى دراستها .

يكاد يكون نمو الرياضة بأكمائها قد تم بهذه الطريقة . أراد أحد الأشخاص أن يفعل أو يصنع شيئا : كان من المستحيل عمله بدون الرياضة ، وبالتالي درست الرياضة ، وأعطى الهدف معنى ووحدة للعمل الذى يؤدى . مثال بسيط جداً : حاول أن تصنع نموذجاً لعمارة ذات سقف هرمى بقطع أجزاء من الورق المقوى ولصقها مع بعضها . ستجد أن الحصول على الأشكال المطلوبة ليس بالسهولة التى يبدو بها . من مثل هذه المسألة وبحثها علمياً يمكن أن تنشأ هندسة وحساب مثلثات كرى . بالعمل فى هذه المشكلة التى تخص صانع اللعب والمهندس المعماري والقيام بالتجربة فيها ستحصل دون أن تدري على الخيال الضرورى لدراسة الهندسة وحساب المثلثات والهندسة الفراغية .

الاهتمام بشيء غريب . توجد مئات من الأشياء التى تشعر أنه

يجب عليك أن تهتم بها ، ولكنك لا تتوقف عندها أبداً ( لكي يكون المرء أميناً ولو لمرة واحدة ) . توجد مئات من الأشياء الأخرى — ملاحظات غريبة ، قصص قصيرة لا هدف لها ، حيل تستخدم فيها عيدان الكبريت ، معلومات متفرقة غير هامة ، تبدو بدون فائدة في الحياة ، ولكنها تبقى في ذاكرتك لسنوات : في المدرسة قرأنا كتاباً في التاريخ لمؤلفيه وارنر ومارتين . لم يتذكر أحد التاريخ ( لم يكن المؤلفان مسئولين عن ذلك ) . ولكن كانت هناك بعض الهوامش في الكتاب : إحداها عن راعي كنيسة كان يزرع المحاصيل في الفناء ، ويقول إنها ستصبح لفتاً في العالم التالي سيدة طلعت صورة بالسواد وقالت « إنها سوداء من الداخل » ، قصيدة عن شخص ينتظر إيرل شاتام ، كل منا بقي متذكراً هذه العبارات لسنوات بعد أن تركنا المدرسة . كانت هذه هي الأشياء التي أثارت اهتمامنا فعلاً .

إذا أردت أن تتذكر موضوعاً وتتمتع به فيجب عليك أن تربطه بطريقة ما بشيء تهتم به فعلاً . من غير المحتمل أن تجد تسليية كبيرة في المراجع . إذا قرأت المراجع فقط ستجد أن الموضوع لا يثير الاهتمام . فالمراجع مكتوبة للناس الذين لديهم فعلاً رغبة قوية في دراسة الرياضة ، وهي ليست مكتوبة بغرض خلق هذه



الرغبة . لا تبدأ بقراءة الموضوع : ابدأ بالقراءة حول الموضوع  
كتب عن الحياة الفعلية تلمس الموضوع بطريقة ما ، وتبين كيف ،  
أصبحنا محتاجين لهذا الموضوع .

في أية مدينة كبيرة ستجد من السهل الحصول على كتب جيدة  
من المكتبة العامة ، وجميع المكتبات تستخدم نفس الطريقة في  
عمل فهرس للكتب ، وهي الطريقة المعروفة بنظام ديوي العشري  
ألق نظرة على الكتب بين الرقمين ٥١٠ ، ٥٣١ . في خلال ساعة  
ونصف وجدت الكتب الآتية على الرفوف غير المخلقة لمكتبة  
ما انشستر المركزية ، وألقيت نظرة على محتوياتها ، وسأعطى الكتب  
هنا بالترتيب الذي اخترتها به . مر سريعاً على أى كتاب لا يبدو  
مقبولاً لك . وتجد إلى جانب كل كتاب رقمه في الفهرس .

٥١٠.٨ هو رسبورا . الآلات الحاسبة الحديثة . لا تحاول  
أن تقرأ هذا الكتاب قراءة كاملة . توجد صورة فوتوغرافية  
للآلات الحاسبة بالقرب من صفحة ٢٦ . إذا كنت تكره الحساب  
فلماذا لا تحاول صنع آلة حاسبة لنفسك ؟

٥١٠.٢ — ملور — الرياضة العالية لطلبة الكيمياء والطبيعة  
كتاب ممتاز ولكن لا تحاول قراءته قبل أن تكون مستعداً له .  
٥١٥.٠ — أبوت — الهندسة العملية والرسوم الهندسية — كتاب  
ملوء بالتوضيحات ، يشمل المسائل التي تشبه مسألة نموذج المنزل .

كيف تقطع صفيحة مسطحة من المعدن لكي تصنع مدخنة لموقد  
مثنية عند أحد مواضعها ؟ ما هو أفضل منحني لصنع عجلات  
التروس ؟ ألق نظرة سريعة على الكتاب كله ، وابحث عن  
الموضوعات التي تثير اهتمامك ثم عد ثانية وحاول أن تجد نوع  
الرياضة الذي يلزم لكل . لغة الكتاب فنية . المبتدئون يجب أن  
يقنعوا بانطباع عام عن الكتاب .

٥٢٣,٠ — سرفيس — متع التلسكوب — كتاب بسيط جداً  
وموضح جيداً يحتوي على خرائط للنجوم . سيحبه الذين لهم  
مواهب فنية — مفيد لرجال الطيران والبحارة الذين قد يستعينون  
بحركة النجوم في القيادة عند الضرورة .

٥٢٢,٢ — بل — التلسكوب — مكتوب خصيصاً لصانعي  
التلسكوبات والنظارات المكبرة . مخصص للرياضة جزء صغير  
فقط من الكتاب . أفضل طريقة — اقرأ الكتاب وأشر على أى  
شيء لا يمكنك فهمه ، استعن بعد ذلك بكتاب أولى عن البصريات  
( رقم ٥٣٥ ) . حاول تصميم تلسكوب ، ميكروسكوب ، آلة  
فوتوغرافية أولية . ميزة صنع تصميمك بالذات هي أنه يمكنك  
استخدام أية أشياء مهمة قد تكون في حوزتك : نظارات قديمة ،  
عدسات مكبرة إلخ ... تكفي الهندسة البسيطة جداً لهذا الغرض

إذا أنت وجدت الطريقة الصحيحة .

٥٢٦،٨ — هنكس — الخرائط والمسح — يشرح الباب الثاني السبب في ضرورة الحصول على الخرائط. الباب الثامن قد خصص لنوع الخريطة التي يرسمها مكتشف البقاع ، والباب العاشر بالمساحة التقريبية التي يقوم بها المستوطنون الأوائل في مدينة على الحدود . يبين الباب الثاني عشر كيفية عمل الخرائط بالتصوير الجوي . وبقراءة الأجزاء المناسبة من هذا الكتاب يمكن للمبتدئ في حساب المثلثات أن يحصل على أساس مفيد ، كيفية عمل خريطة تقريبية لحقل . الخ . يعطى الكتاب أيضاً بعض الارتباطات غير المتوقعة بين الحياة العملية والمسائل العملية : الشكل المضبوط للأرض ومشاهدات النجوم ضرورة لعمل خريطة لمساحة كبيرة من الأرض مثل إفريقيا ، من الصعب عمل خريطة جيدة للهند لأن جبال الهملايا ثقيلة بدرجة تكفي لجذب خيط المطمار جذباً محسوساً وينتج عن ذلك أن هذا الخيط لا يشير مباشرة لمركز الأرض .

وفي سياق الكلام عن الخرائط ، نذكر كتاب « مفتاح للخرائط » لمؤلفه البريجادير ه . سانت ، ج . ل . ونتر بوثام . يدل الرحالة على الكيفية التي يعرفون بها من خريطة كيف سيكون الاتجاه ، من أى مكان ، هذا إلى جانب أمور أخرى . كثير من المكتبات

يوجد بها هذا الكتاب أو يمكنها الحصول عليه .

٥٣٠،٣ — سوندرز — استعراض الفيزياء — يقول المؤلف  
« سنقدم للقارىء بعض أسرار الطبيعة وكذلك كثيراً من  
الاختراعات البارعة للإنسان » .

٥٣١،٠ — جودمان — تطبيق الميكانيكا للفنون الهندسية —  
يحتوى على قدر كبير من المعلومات . لست متأكداً من أن المبتدئين  
سيحبون هذا الكتاب . كما فعلت بالنسبة لجميع الكتب الأخرى ،  
تصفح هذا الكتاب ، واعرف أى شيء تستطيع معرفته ، ولكن  
لا تبتئس إذا وجدت أنك لا تستطيع أن تتبع بعض أجزائه  
على الإطلاق .

قد تجد شيئاً يشير اهتمامك تحت رقم ٣٨٥ ، السكك الحديدية ،  
٦٢٠،٩ ، تاريخ العلوم الهندسية ، ٦٢٦ ، القنوات . إذا كنت تهتم  
اهتماماً خاصاً بأى موضوع ، سيدلك موظفو المكتبة أين تبحث .  
انظر فى الكتالوج فى أى جزء يشير اهتمامك . من الأفضل أن  
تنفق وقتاً طويلاً فى البحث عن كتاب يشير الاهتمام فى الموضوع  
بدلاً من قراءة عدة كتب تؤدى بك إلى الملل .

وغالباً ما يكون من السياسة الحكيمة أن تقرأ كتاباً تكون مادة  
تسعة أعشاره هى مجرد تذكير لك بأشياء عرفت من قبل بينما  
العشر الباقى يحتوى على مادة جديدة . فى هذه الحالة سيكون عند

عقلك طاقة كافية لدراسة حقائق جديدة . لا تبذل مجهوداً كبيراً  
لكي تذكر جميع التفاصيل . أى شيء يشير اهتمامك سيبقى راسخاً  
فى عقلك . إذا وجدت بعض المعلومات التى قد تحتاج إليها فيما بعد ،  
أكتبها فى كراسة تخصصها لهذا الغرض . يجب أن يكون هدفك  
أن يوجد فى عقلك نظرة عامة عن الموضوع ، وفى مكتبك مجموعة  
من الحقائق المضبوطة يمكنك استخدامها فى أية مسألة معينة .

### كتب عن تاريخ الرياضة وطريقة تدريبها

إذا وجدت فى هذه الاقتراحات أية فائدة ، إذا أنت عن  
طريق قراءة تلك فى المكتبة أو بالنظر حولك فى الطريق وجدت  
أى شيء تحبه فعلاً وتود أن تعرف أكثر عنه ( حيث لا توجد  
عزيمة لا يوجد مخرج ) ، فإنك ستجد نفسك قد أصبحت بسرعة  
إخصائياً فى هذا الأمر . وقد يكون ذلك أى شيء من الرادار  
إلى الكيفية التى تصمم بها المجارى ، مادام يشير اهتمامك . وكلما  
عرفت أكثر عن هذا الموضوع لن تتحمل المقدمات المعروفة  
وستجد نفسك راغباً فى الإجابات الكاملة عن الأسئلة ، وهو  
أسلوب الاحتراف أو التعلق بالمهنة . ستجد نفسك تقرأ المجلات  
الضخمة التى كانت تبدو جافة فى العام السابق . لن تقرأها من البداية



للنهاية ستبحث بمهارة عن الفقرة أو الفقرتين التي تتعلق بما تريد أن تعرفه في الوقت الراهن . وستتحقق من أنه يمكنك معالجة أى موضوع قد يثير اهتمامك في المستقبل بنفس طريقة الاحتراف هذه ، وذلك ،هما كان هذا الموضوع معقداً بالرغم من أنك قد لا تكون مهتماً بأية موضوعات أخرى في الوقت الحالى . هذه الثقة وهذا التحرر من الخوف هي الصفة الأساسية التي تميز الخبير . ليس من الضروري أن يعرف الخبير الكثير . يجب عليه أن يعرف كيف وأين يجد المعلومات .

وكما أصبح الموضوع الذي اخترته كهواية معروفاً لك بدرجة أفضل ، كلما بدأت تتحقق من مدى تقاربك من الرجال الذين عملوا فيه واكتشفوه . عندما تصل لهذه المرحلة ، قد تجد من المفيد أن تكون لديك فكرة عن التواريخ التي عاش فيها هؤلاء الرجال . وتوجد أسباب متعددة لذلك : ( أولاً ) بملاحظة التواريخ يمكنك أن تأخذ فكرة عن مدى ما يعرفونه عن الموضوع . مثلاً ، إذا وجدت أن كل الرياضة التي تعرفها اكتشفت قبل سنة ١٨٠٠ فإنك ستتحقق من أنه لا يزال عليك أن تتعلم الكثير . لقد شهد القرن التاسع عشر نشاطاً رياضياً هائلاً . ان تقع في خطأ محاولة إجراء بحوث قبل أن تبذل بعض المحهود لمعرفة ما إذا كانت المسألة التي تحيرك قد حلت من قبل . ( ثانياً ) إذا عرفت القدر الذي

كان معلوماً من الموضوع في أى وقت ، فعادة يكون من الأسهل بكثير رؤية كيف اقترحت مخترعات معينة بواسطة أشياء معروفة فعلا . وهذا يساعدك على فهم الموضوع . ( ثالثاً ) إذا استعصى على فهمك شيء فإن قراءة تاريخ هذا الاكتشاف قد تساعدك ، وحياة المكتشف نفسه تساعد كثيراً في أغلب الأحيان ، والمحاولات التي قام بها والتجارب التي أجراها قد تعطيك المفتاح . بهذه الطريقة يمكنك تجنب الصعوبة التي قابلتك بالقراءة في المواضيع المحيطة بها ، وهو أمر أفضل بكثير من التخبط فيها دون جدوى . ولا يستغل التاريخ في تعليم الرياضة إلا بدرجة بسيطة جداً .

عند اختيار كتاب تاريخي عن تعليم الرياضة ، ابحث عن كتاب يكون مقبولا لك ، ولا تنزعج إذا أنت لم تستطع قراءة الكتاب بأكمله . لا توجد طريقة كاملة ( مثالية ) للتعليم . الأمر الذي يناسب طالباً لا ينفع على الإطلاق مع آخر . ومهمة المدرس الموكل إليه تعليم فصل من خمسين تلميذاً هي مهمة تكاد تكون مستحيلة . إذا قرأت كتاباً عن التعليم ستجد أن هناك طرقاً كثيرة مختلفة لمعالجة الموضوع . قد تشعر أنه كان من الأفضل لك بكثير لو أنك تعلمت بإحدى هذه الطرق . لاحظ أسماء الناس الذين طوروا هذه الطريقة وانظر ما إذا كان يوجد في مكتبك أى من مؤلفاتهم . يحتوى كتاب تعليم الرياضة لمؤلفه ج . و . يونج ( ١٩١١ ) :

The Teaching of Mathematics على وصف لاتجاهات متعددة في تدريس الرياضه ، والمؤلف واضح وذو صفات إنسانية . ستجد في هذا الكتاب عدداً كبيراً من المراجع يمكن أن يكون أساساً للقراءة التالية . وأحد المصلحين الذين ذكرهم يونج هو الأستاذ جون بيرى ، والاقتباس الموجود في أول هذا الباب مأخوذ عن خطابه في الجمعية البريطانية سنة ١٩٠١ . وهذا الكتاب يستحق القراءة لحديث بيرى وملاحظات قادة علماء الرياضه الحاليين . ( أغلبها مؤيد ) . وإن كل ما كتبه بيرى يستحق القراءة . ونذكر هنا كتابه حساب التفاضل والتكامل للمهندسين . لقد مضت أكثر من أربعين عاماً منذ أعطى بيرى هذا التوجيه: إذا كان الآباء والمدرسون والهيئات التعليمية عالمين تماماً في يومنا هذا بما قيل في سنة ١٩٠١ ، فإن كثيراً مما يقاسيه الأطفال عقلياً يمكن تجنبه ، ولا يوجد شك في أننا نسير نحو هذا الاتجاه . ولكن ما يزال أمامنا الكثير .



## الجزء الثاني

في أجزاء معينة من الرياضة



## الباب الخامس

### الحساب

« واحد ، اثنان ، كثير »  
الطريقة التأسيسية للعد

يلعب الحساب دوراً صغيراً جداً في الرياضة ، وعلى الخصوص في الرياضة العالية . الهندسة ، كما رأينا فعلاً ، يمكن دراستها مباشرة من الرسوم التي غالباً ما ترتبط بالأعداد البسيطة ٣ ، ٤ ، ٥ إلخ . . . وكلها تقدم الإنسان أخذ احتمال استخدام الحساب يقل . وهذا هو السبب في وجود قصص كثيرة عن رياضيين مشهورين يدخلون في نقاش مع محصلي الترام حول الباقي لهم ، ويظهر أنهم مخطئون .

لا يعتمد الحساب على أشياء معينة يتحتم حفظها عن ظهر قلب مثل جدول الضرب وجداول الجمع والطرح . من يتعلم الحساب عليه أن يصبح ما كينة . مثلاً ، الموظف الذي يجمع قوائم طويلة من الأرقام لا يحتاج لأن يفكر تفكيراً عميقاً حول طبيعة العدد ويكفيه أن يرى الرقمين ٧ ، ٨ لكي يقفز العدد ١٥ فوراً إلى عقله .

وبينما يكون فى الإمكان تعليم الحساب بأسلوب ميكانيكى بحث ، فمن المؤكد أن من غير المرغوب فيه القيام بذلك . وحتى بالنسبة لأبسط العمليات ، من السهل تذكر ما يجب عمله إذا عرف الإنسان السبب . الحفظ الآلى قاتل بالنسبة لآى شخص يرغب فى الانتقال لفروع الرياضة الأخرى . حتى الآن لم يكتشف أى إنسان آلة تستطيع أن تفكر بنفسها . ومن المؤسف أنه لا تزال توجد مدارس ( وعلى الخصوص مدارس الفتيات ) يدرس فيها الحساب طبقاً للتعليمات « تفعل هذا وبعد ذلك تفعل ذلك » كما لو كان الموضوع طقوساً دينية .

وليس الحساب بالموضوع الذى يصعب عليك اكتشافه بنفسك . توجد أشياء كثيرة تقف على حافة الحساب . فمثلاً عند إجراء عملية جراحية فى مستشفى ، تحمل الممرضة لوحة بخطافات تتعلق فيها جميع الأشياء التى ستدخل فى جسم المريض ، والتى يجب أن تخرج ثانية . وقبل حياكة جروح المريض يجب أن تتأكد الممرضة من أنه لا يوجد أى خطاف ناقص . هذه العملية ليست عملية عد ، ولكنها قريبة جداً من أن تكون كذلك . عندما نعد على أصابعنا الطريقة (الأولية ١) فإننا نستخدم الأصابع بدلاً من الخطافات . العد بأصابع اليدين ( أو اليدين والرجلين ) لا يفيد إلا بالنسبة

للأعداد الأقل من عشرة ( أو عشرين ) (\*) . العمل المشترك يلزم للتقدم أكثر من ذلك . إذا قبل أحد الأصدقاء أن تفهيه كلها وصلت في العد إلى عشرة ، وأن يعد هذه التنبيهات على أصابعه فمن الممكن الوصول في العد إلى مائة . وإذا وجد ستة أشخاص فمن الممكن الوصول في العد إلى المليون ، هذا بالرغم من أن الشخص السادس يمكنه أن ينام أغلب الوقت . ( لا أرى سبباً يمنع من العد بهذه الطريقة نفسها في فصول الأطفال الصغار . وذلك لنفسهم لهم ما نعينه بعدد مثل ٢٤٣ . عندما يلعب الأطفال لعبة الاستخفاء يعد الأطفال بمحض اختيارهم أعداداً كبيرة نسبياً ويبدو أنهم يستمتعون بذلك ) .

وفي الأساس ، تستخدم نفس هذه الفكرة في الأجهزة التي تقيس المسافة التي تحركتها سيارة أو دراجة . وكل عجلة ، عندما تدور عشر دورات ، تدفع ، العجلة التالية . وماكينات الجمع تصنع على أساس الفكرة ذاتها .

---

(\*) يمكنك أن تجد بعض التفاصيل المسلية عن الطرق البدائية للعد في كتاب الثقافة البدائية مؤلفه إ. ب. تايلور Primitive Culture by E.B. Tayler

الباب السابع ، وفي كتاب اللغة العلم مؤلفه توبياس دانتزيج Number, the Language of Science by Tobias Dantzig

البابان الأول والثاني .

ويمكن مساعدة التصور أكثر إذا قمنا بعد أشياء مادية محسوسة (عيدان ثقاب مثلاً) . الشخص الأول يربط العيدان في حزم كل منها يحتوي عشرة . الشخص الثاني يأخذ عشر حزم ويضعها في صندوق . توضع محتويات عشرة صناديق في حقيبة ومحتويات عشر حقائب في زكينة ، ومحتويات عشر زكائب في سيارة ومحتويات عشر سيارات في قطار — المراحل الأخيرة تتم في الخيال فقط . وفي نفس الوقت يمكن توضيح تقدم العمل على لوحة ك لوحة نتائج لعبة الكريكييت مثلاً . سنجد بسرعة أن الرقم ١٢٧ والصوت د مائة وسبعة وعشرين ، وصورة الصندوق وحزمتين وسبعة أعواد ثقاب ، سنجدها تندمج معاً في عقل الطفل .

جميع العمليات ، مثل جمع ١٤ ، ٢٨ ، وطرح ١٧ من ٢١ ، وقسمة ٨٤ إلى ثلاثة أجزاء متساوية يمكن إجراؤها أولاً بالتجربة بأشياء فعلية : وثانياً بالأشياء وبلوحات النتيجة معاً : وأخيراً بالكتابة فقط .

في طريقة مونتسوري ، تدرس جداول الجمع بطريقة من هذا النوع . يوجد مع الأطفال عصي تمثل الأعداد من واحد إلى تسعة ، وعليهم أن يرتبوها بحيث يحصلوا على عشر وحدات في كل صف كما يلي :

X X-X-X-X-X-X-X  
X-X X-X-X-X-X-X

3.09 + 1  
3.08 A+C

وهكذا .

من المفيد للغاية أن يوجد في حوزة الأطفال ورق مربعات،  
مقطع على هيئة شرائط عرض كل منها عشرة مربعات .  
والمربعات منمرة : ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠  
١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠  
وهكذا . يمكن عندئذ إجراء جدول الجمع بلمصق الشرائط  
ذات الطول المضبوط . وإذا احتاج عدنان ، مثل ٧ ، ٦ ، إلى  
أكثر من صف واحد كامل ، فإن المربعات الزائدة تقطع وتثبت  
في الصف التالي :

لقد سمعت رياضيين ناجحين يقولون إنه عند جمع ٧ ، ٦ كانت توجد فكرة « مخفية » ، في عقولهم هي أن ٣ من الوحدات الست تلزم لإضافتها إلى ٧ لتصبح ١٠ ، وبالتالي تبقى ثلاث وحدات أخرى .

سبعة				ست			

يمكن تعميم هذه الطريقة لجدول الضرب ، وذلك بتكرار  
اصق الشرائط التي تحتوى على نفس العدد من المربعات . وتنشأ  
نماذج مثيرة . انظر إلى جدول « اثنين » ، لاحظ كيف يبدو بسيطاً  
بالنسبة لجدول « ستة » .



	٢		٤		٦		٨		١٠
	١٢		١٤		١٦		١٨		٢٠

					٦				
	١٢						١٨		
			٢٤						٣٠
					٣٦				
	٤٢						٤٨		
			٥٤						٦٠

وأبسط الجميع ( وأسهلها في الحفظ ) هو جدول العشرة  
ويليه جدول ٥، ٢، وبعد ذلك ٩، ٣، ثم ٤، ٦، ٨، وأصعب  
الجميع هو جدول ٧ — ربما يصلح لعمل ورق حائط جيد .

ومنظر النماذج يؤثر في الجانب الفني الذي يكون قوياً عند  
الأطفال . الرياضيون الممتازون حساسون جداً بالنسبة للنماذج .

والنماذج تشير أيضاً أسئلة . لماذا يشبه نموذج د ٣ ، نموذج  
د ٩ ، ؟ لماذا تكون نماذج د ٥ ، د ٢ ، منظمة في خطوط  
رأسية ؟

قيل عن رامانوجان إن كل عدد كان يبدو صديقاً شخصياً  
له . يجب على الإنسان أن يحاول أن يقدم الحساب للأطفال  
بطريقة تجعلهم يتحققون من « الشخصية » التي يمتلكها كل عدد .

خمسة أسباع الياردة المربعة . للحصول على خمسة أسباع يجب أن نقسم الماشمع إلى سبع قطع متساوية بالخطوط الرأسية الموجودة في الشكل ص ١٠٣ — ونأخذ خمس قطع من هذه القطع . وإذا قطعنا على طول الخط الرأسى الثقيل فإن القطعة الموجودة على اليسار تحتوى على الخمسة أسباع . نريد الآن ثلثى هذه القطعة . الخطوط الأفقية تقسم الشكل بأكمله إلى ثلاثة أجزاء متساوية . إذا قطعنا على طول الخط الثقيل الأفقى سنحصل على قطعة تساوى ثلثى الخمسة الأسباع . بعد القطع الأول تستبعد القطع المعلمة بدوائر ، وبعد القطع الثانى تستبعد القطع الميمنة بعلامة X .

هذا الشكل يبين كيفية تمثيل  $\frac{2}{3}$  من المرات  $\frac{5}{7}$  بكسر واحد . لقد قسمنا الياردة المربعة إلى ٢١ من القطع التى لها نفس المساحة ونفس الشكل . المستطيل  $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$  يحتوى على ١٠ من هذه القطع الصغيرة . وكل قطعة هى  $\frac{1}{21}$  من الياردة المربعة ، وعلى ذلك فإجابتنا هى  $\frac{10}{21}$  . وفى الواقع ، وجدنا قاعدة ضرب الكسور

$$\frac{5 \times 2}{7 \times 3} = \frac{5}{7} \times \frac{2}{3}$$

وأحد الأخطاء المألوفة فى أوراق الإجابة تنتج عن أن التلاميذ يخلطون بين قاعدة جمع وضرب الكسور . فهم يكتبون مثلاً

$$\frac{3+1}{5+3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

وهو كلام لا معنى له على الإطلاق؛ وذلك لأن الجواب الذى يحصل عليه بذلك هو  $\frac{2}{8}$  ويختصر إلى  $\frac{1}{4}$  الذى هو أقل من  $\frac{2}{5}$  .

هذا الخطأ يكون طبيعياً جداً إذا كان أسلوب التعليم الحفظ عن ظهر قلب . وكل ما حدث هو استبدال بالعلامة « x » ، العلامة « + » . واحتمال وقوع التلميذ أجرى تجارب على العلامتين « x » و « + » وأصبح يشعر بأن المعنيين مختلفان لهاتين العلامتين ، احتمال وقوع مثل هذا التلميذ فى مثل الخطأ الذى سبق ذكره هو احتمال ضعيف جداً .

ومن المفيد للقارىء أن يصمم شكلاً يوضح فيه الطريقة الصحيحة لجمع  $\frac{1}{6} + \frac{2}{5}$  .

### الكسور العشرية

يجب ألا تنشأ أية صعوبة فى تدريس أو دراسة الكسور العشرية . ويمكن توضيح الكسور العشرية بنفس طريقة « العمل الجماعى » كما اقترح فى حالة الأعداد الصحيحة .

وقياس مستقيم هو عملية توضيحية مناسبة . المتر هو مقياس فرنسى لا يختلف كثيراً عن الياردة . الديسيمتر هو جزء من عشرة من المتر ، السنتيمتر هو جزء من عشرة من الديسيمتر ، والمليمتر

هو جزء من عشرة من السنتيمتر . المستقيم الذى طوله متر واحد ،  
٣ ديسيمتر ، ٢ سنتيمتر ، ٥ ملليمتر يكتب باختصار ١,٣٢٥ متر .  
وبينما نجد فى المقاييس الإنجليزية أن تحويل ٢ ياردة ،  
١ قدم ، ٣ بوصة إلى بوصات ليس بسيطاً ، فى حالة المقاييس الفرنسية  
يتضح على الفور أن ١,٣٢٥ متر يساوى ١٣٢٥ ملليمتر أو ١٣٢,٥  
سنتيمتر أو ١٣,٢٥ ديسيمتر .

المسطرة العادية التى تستخدم فى المدارس مقسمة إلى ملليمترات  
وسنتيمترات وديسمترات . وعلى ذلك فمن السهل تكوين الطول  
المذكور سابقاً — شريط طوله متر ، ثلاثة أشرطة طول كل منها  
ديسمتر ، سنتيمتران وخمسة ملليمترات .

طريقة جمع الكسور العشرية هى نفس طريقة جمع الأعداد  
الصحيحة . يمكن توضيح ضرب الكسور العشرية بمساعدة  
المستطيلات كما فعلنا فى حالة الكسور الاعتيادية .

### الأعداد السالبة

ظهرت فى المجلة الفكاهية بنش Punch خلال حرب ١٩١٤ —  
١٩١٨ صورة تبين موظفاً يقول لفلاح دلايمكنك ياسيدى العزيز  
أن تذج خروفاً كاملاً مرة واحدة ! ،

هذه الملاحظة السخيفة توضح أنه لا يوجد معنى للكسور بالنسبة لأشياء معينة : لا يمكن أن يوجد لديك نصف خروف حتى : ولا يمكن أن تقسم ورقة إلى ثلاث قطع ونصف . ولكن يوجد للكسور معنى في نواح أخرى : من السهل جداً أن يكون لديك  $\frac{3}{4}$  قدم من مواسير الرصاص .

وبنفس الطريقة ، توجد أوقات لا يمكنك أن تتحدث فيها عن أعداد أصغر من الصفر : كما توجد أوقات أخرى يكون ذلك فيها ممكناً .

من الجائز أن يوجد رجل بلا أبناء ، ولكن من المستحيل أن يكون لديه أقل من لا شيء . ويمكن ألا يوجد شيء في صندوق : ولكن من المستحيل أن يوجد فيه أقل من لا شيء .

ولكن توجد أمثلة نذهب فيها إلى ما تحت الصفر . مثلاً في نظام فهرنهايت لقياس درجات الحرارة يتجمد الماء عند درجة ٣٢ ، ويتجمد خليط من الماء والملح عند درجة الصفر . ومن الممكن الحصول على درجات حرارة أبرد من ذلك بكثير . تكتب درجات الحرارة هذه بعلامة سالبة . فمثلاً - ١٠ درجات يعنى ١٠ درجات أبرد من درجة الصفر . تقابلنا درجة - ٢٢ في الثلاثجات التي يستخدم فيها النشادر . لاحظ أن - ٢٢ درجة هي أبرد من درجة - ١٠ .



بنفس الطريقة يمكننا أن نعالج الارتفاعات والأعماق . إذا سقطت قنبلة في البحر من ارتفاع ٥٠ قدماً يمكننا اقتفاء سقوطها من ٥٠ قدماً إلى ٤٠ ، ٣٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، صفر قدماً فوق سطح البحر . ولكن القنبلة لن تتوقف عند سطح البحر . قد تصل القنبلة إلى عشرة أقدام تحت سطح البحر ، ويمكن أن نسمى هذا ارتفاعاً قدره - ١٠ أقدام .

إذا كان هناك رجل مدين بمبلغ جنيه فهو في حالة أسوأ من آخر ليس معه مال على الإطلاق . فعلى الأقل الأخير حر . إذا سمينا ثروة الأخير صفراً من الجنيهات فيمكننا أن نقول إن ثروة الأول هي ( ١ - ) جنيه . إذا كنت تملك ( ١ - ) جنيه فيجب أن يعطيك شخص مبلغ جنيه حتى تصل إلى مرتبة من يملك لا شيء وأن يملك الإنسان ( - ١٠٠ ) جنيه يعني أن يكون مديناً بمائة جنيه ومرة أخرى - ١٠٠ هو أسوأ من ناقص ١ . وإذا وجدت علامة سالبة على يمين عدد ، فإن مرتبة العدد تعكس . و ( ١ - ) جنيه يمثل ثروة أفضل من ( - ١٠٠٠٠ ) جنيه .



بنفس الطريقة ، إذا تراجع جيش بمعدل ١٠ ميل في الساعة  
يمكننا أن نقول إنه « يتقدم بمعدل — ١٠ ميل في الساعة » . إذا  
كان الجيش يتحرك بمعدل « — ١ ميل في الساعة » فهذا أفضل من  
التحرك بمعدل « - ١٠ ميل في الساعة » .

الإشارة السالبة تقلب كل شيء رأساً على عقب ، مثل انعكاس  
الأشجار والمنازل في نهر .

استمر الرياضيون لمدة طويلة في الشعور بأنه ليس من العدل  
استخدام الأعداد السالبة ، ولكن وجدوا بمرور الوقت أن  
الأعداد السالبة يمكن استخدامها ، وجمعها وطرحها وقسمتها وأن  
يحصلوا من ذلك على نتائج مفيدة .

### العمل بالأعداد السالبة

قد نرى كيفية استخدام الأعداد السالبة إذا نحن فكرنا في  
الأعداد العادية على أنها تعني شيئاً يعطى والسالبة على أنها شيئاً  
يؤخذ . وقد تفكر في العدد ٥ مثلاً كورقة مالية من ذات الخمسة  
جنيهات أو على شيء يعطى خمس مرات ؛ و - ٥ ستعني عندئذ  
فاتورة قيمتها خمسة جنيهات أو شيء يؤخذ خمس مرات .

في كثير من الأحيان نضع الأعداد السالبة بين أقواس ، مثلاً إذا

أردنا أن نقول د أضف - ٤ إلى - ٣ ، فسيبدو غريباً إذا نحن  
كتبنا ببساطة - ٤ + - ٣ . وبالتالي نكتب (- ٤) + (- ٣)  
وهذا يعنى أن الشيء الموجود بين القوسين الأولين ، - ٤ ،  
يجب جمعه على الشيء الموجود بين القوسين الثانيتين ، - ٣ .  
(- ٤) - (- ٣) تعنى أننا يجب أن نأخذ - ٣ من - ٤ .

ماذا تعنى هذه الأمور عملياً ؟ يمكننا أن نقول إن - ٤ مضافة  
إلى - ٣ تعنى أن رجلاً كان مديناً بأربعة جنيهات ثم وصلت إليه  
فاتورة بمبلغ ثلاثة جنيهات فأصبح دينه الكلى سبعة جنيهات ، أو  
أن جيشاً خسر ٤ أميال من الأرض ثم خسر ثلاثة أميال أخرى .  
فالخسارة الأولى أضيفت للخسارة الثانية . وفي كلتا الحالتين ، نرى  
أن خسارة ٤ مع خسارة ٣ هى نفس الشيء كخسارة واحدة قدرها  
٧ ورموز الحساب (- ٤) + (- ٣) = (- ٧) .

بنفس الطريقة ، إذا كان علينا أن نجمع ٤ ، - ٣ ، فهذا يعنى  
مكسباً قدرة ٤ متبوعاً بخسارة قدرها ٣ وواضح أن ذلك يعادل  
مكسباً واحداً قدره واحد . وبالاختصار ٤ + (- ٣) = ١ .

وفي الواقع أن ٤ + (- ٣) تعنى بالضبط نفس ما تعنيه ٤ - ٣ .  
لا يوجد أى شيء جديد في ذلك فيما عدا العلامات وهذه العلامات  
تستخدم بكثرة في الحياة العادية ، لبيان التغيرات في التجارة ، في

البطالة ، في موقف الأحزاب في المعارك الانتخابية ، + للزيادة  
— للنقص .

طرح الأعداد السالبة هو شيء يثير قليل من اللبس في البداية .  
من الأفضل أولاً أن نكون واضحين عما يعنيه الطرح  $7-3=4$  .  
نعني أنه بمقارنة رجل معه 7 جنيه بآخر معه 3 جنيه فإن الأول  
يكون أفضل من الثاني بأربعة جنيهات . الطرح يعني مقارنة  
شيئين ويمكننا مقارنة الخسارة تماماً كما نقارن المكسب . الجيش  
الذي يفقد 200 رجل هو في مركز أفضل من الجيش الذي يفقد  
1000 رجل ، والأفضلية هي بمقدار 800 رجل أنقذت حياتهم ،  
وخسارة 200 تكسب باختصار - 200 . وخسارة 1000 تكسب  
- 1000 . ولمقارنة الاثنين نطرح  $(200-) - (1000-) = 800$  .  
لاحظ أنه لا توجد علامة سالبة على يمين العدد 800 فإذا بدأ  
جيشان يتقابلان بنفس العدد من الجنود ، فإن الجيش الذي يفقد  
200 رجل يكون أقوى من الجيش المضاد الذي يفقد 1000 رجل  
وذلك بمقدار 800 رجل حتى .

يمكننا بدلاً من ذلك أن نفسر  $(200-) - (1000-) = 800$  .  
على أنها تعني أن الرجل المدين بمبلغ 200 جنيه هو أفضل من  
رجل مدين بمبلغ 1000 جنيه وذلك بمقدار 800 جنيه . أو يمكننا

أن نقول إن باخرة غارقة على عمق ٢٠٠ قدم تحت سطح البحر هي أعلى من أخرى على عمق ١٠٠٠ قدم تحت سطح البحر بمقدار ٨٠٠ قدم . وبالتالي فإن الأولى أسهل في رفعها إلى سطح الماء .

ماذا عن الضرب؟ لا يمكننا أن نتحدث عن ذلك إلا باختصار .  
 يمكننا أن نفكر في  $٤ \times ٥$  على أنها تعني « أعطى شخصا أربعة أوراق مالية كل منها من فئة الخمسة جنيهات، وهذا يعادل تماما إعطاءه ٢٠ جنيها،  $٤ \times ٥ = ٢٠$  »

ماذا يعني  $٤ \times (٥ - )$  ؟ تمثل أخذ خمسة جنيهات ، أو فائرة بمبلغ خمسة جنيهات  $٤ \times (٥ - )$  تعني أربع فواتير كل منها بمبلغ ٥ جنيهات وبالتالي فائرة بمبلغ ٢٠ جنيها وعلى ذلك فإن  $٤ \times (٥ - ) = ٢٠ - (٤ - ) \times ٥$  تعني نفس الشيء ، فهذه العبارة تناظر « اسحب أربع أوراق مالية كل منها من فئة الخمسة جنيهات ، أي « اسحب ٢٠ جنيها ، وعلى ذلك فإن  $٢٠ - = ٥ \times (٤ - )$  »

وأدق الحالات هي  $(٤ - ) \times (٥ - )$  . إذا أخذنا ٥ على أنها تعني « فائرة بمبلغ خمسة جنيهات ، ، - ٤ على أنها « اسحب أربع مرات ، ،  $(٤ - ) \times (٥ - )$  ستعني « اسحب أربع فواتير قيمة كل منها خمسة جنيهات . إذا جاءك ساعي البريد وقال



لك أظن أن لك أربع فواتير كل منها بخمسة جنيهات ، وكان المفروض توصيلها للأسرة التي تسكن بجوارك ، ستجد نفسك أفضل بعشرين جنيها عن حالتك فيما لو كنت مقصودا فعلا بهذه الفواتير . أفضل تعنى  $+$  وعلى ذلك فتأثير إشارتين سالبتين مضروبتين معا هو إعطاء إشارة موجبة . وعلى ذلك نستنتج أن

$$(-) \times (-) = (+)$$

قد يشعر القارئ أن هذا الكلام ليس إلا ضجة بدون سبب على الإطلاق . كل منا يعرف أن الشخص يكون في حاله أفضل إذا كان دائما بأكثر مما هو مدين به . لماذا نثير كل هذه الضجة حول إشارتي  $+$  ،  $-$  ؟ الإجابة هي أننا لن نقتصر في استخدامنا للإشارة السالبة على مجرد الناس المدينين . سنهتم فيما بعد بعبارات مثل  $ص = س^2 - ٣س$  ، أو  $ص = (س - ١) \times (س - ٢)$  وهى عبارات قد تظهر فيها الإشارات السالبة . وهذا هو السبب الذى من أجله يجب علينا أن نعرف كيف نتعامل بالإشارات السالبة وسيظهر فى الأبواب التالية معنى العبارات الرياضية والفائدة التى يمكن الحصول عليها منها .

### الأعداد التجميعية أو المؤثرات

ستلاحظ أن  $٣ \times ٣ = ٩$  وأن  $٣ - ٣ = ٠$

أيضاً . لا يوجد أى عدد عادى ( سواء + أم - ) يعطى عند ضربه فى نفسه - ٩ . « إشارتان سالبتان تعطيان إشارة موجبة » .

من المعتاد تسمية  $3 \times 3$  « مربع ٣ » : ٩ هى مربع ٣ . العدد ٩ هو أيضاً مربع - ٣ . ٣ - ٣ يسميان الجذران التربيعيان للعدد ٩ .

جميع الأعداد الممكنة لها جذران تربيعيان واحد موجب وواحد سالب . الجذران التربيعيان للعدد ٤ هما + ٢ ، - ٢ . الجذران التربيعيان للعدد ١٠ هما ٣.١٦ ، - ٣.١٦ بالتقريب . ولكن يبدو أن الأعداد السالبة ليست لها أية جذور تربيعية . العدد - ٩ ليس له جذور تربيعية ولا العدد - ٤ ولا - ١٠ . الأعداد السالبة هى سندريلا<sup>(١)</sup> الرياضة بالنسبة للجذور التربيعية .

ولكن الرياضيين قد نجحوا فى إيجاد نوع من البديل للجذر التربيعى فى هذه الحالات . وهذا البديل يسمى مؤثر . المؤثرات ليست أعداداً ، ولكنها تستطيع أداء كثير من الأمور التى تؤديها الأعداد الحقيقية . فمثلاً تستطيع أن تضرب المؤثرات . ومؤثر

---

(١) يشير المؤلف هنا إلى الفتاة سندريلا فى القصة المشهورة : المترجم

معين يسمى ( ٣ ت ) بحيث إن ٣ ت من المرات لـ ٣ ت  
يساوى - ٩ . ومؤثر آخر يسمى د ت ، بحيث إن  
ت × ت = - ١

يبدو هذا الـ د ت « كقصة رياضية خرافية . الشيء الذى  
يشير الاهتمام هو أن د ت ، مفيد جدا بالنسبة لكثير من الأغراض  
العملية : مثل الالاسلكى والإضاءة الكهربية . سنفسر فيما بعد  
ما هو د ت ، ونبين أنه لا يوجد أى شيء غامض بالنسبة له  
على الإطلاق .

## تمارينات

### مسائل على النماذج

فى الأسئلة من ١ - ٤ ، يمكن استخدام ورق المربعات ،  
كما فعلنا بالنسبة لجدول الضرب . يجب على القارئ أن يفكر  
ما هو أفضل عدد للمربعات التى توضع فى كل صف ، مثلا ، فى  
السؤال الأول إذا أخذنا تسعة مربعات فى كل صف ( كما هو  
موضح ) ، سيكون الموضوع واضحا .

١ - ألبرت وزوجته مجندان ، يأخذ ألبرت إجازة مساء كل  
تسعة أيام ، وزوجته كل ستة أيام ، وألبرت فى إجازة هذا المساء :

وزوجته ستأخذ أجازتها مساء الغد . متى ( إذا كان هذا ممكنا على الإطلاق ) يحصلان على أجازتهما في المساء نفسه .  
في النموذج كل مربع يمثل إحدى الأسميات وحرف ا يوجد

٢	ب						ب	
٢				ب				
٢	ب						ب	
٢				ب				
١	ب						ب	
٢				ب				

داخل المربع عندما يكون ألبرت في إجازة في المساء الذي يمثله هذا المربع ، بالمثل إذا وجد الحرف ب داخل مربع كانت الزوجة في إجازة في المساء الذي يمثله . سنرى أن حرف ب سيأتي دائما في العمود الثاني أو الخامس أو الثامن ، ولن يوجد على الإطلاق حرف ب في العمود الأول حيث يوجد حرف ا دائما . الإجابة هي : لن يكونا أبدا في إجازة في المساء نفسه .

- ٢ — في السؤال الأول ، هل يحدث تغيير لو أن الزوجة كانت تأخذ إجازتها كل خمسة أيام بدلا من كل ستة أيام ؟
- ٣ — في أحد المعسكرات يقوم أحمد بالحراسة مرة كل

ثلاث ليال ، وبكرى مرة كل أربع ليال ، وجميل مرة كل  
خمس ليال ، وداود مرة كل ست ليال ، وهانى مرة كل سبع  
ليال . بدأ جميع الرجال عملهم فى نفس الليلة ، الجمعة .

ما هو عدد الليالى الذى يمضى إلى أن يقوم أحمد وبكرى  
بالحراسة معا ثانية ؟ وكذلك أحمد وجميل ؟ ، وبكرى وجميل ؟  
هل ستأتى ليلة يقوم فيها كل من أحمد وجميل وداود معاً  
بالعمل ؟

فى أيام الجمع عندما لا يكون هناك تكليف بالحراسة ، يقضى  
الجند سهرتهم فى النادى . كم من المرات لا يستطيع أحمد أن  
يذهب إلى النادى ؟ وكم من المرات لا يستطيع الآخرون  
الذهاب ؟

هل توجد أى ليلة من ليالى الأسبوع يستطيع أن يضرب  
فيها أحمد موعداً باستمرار ؟ أم أن عليه إن أجلاً أو عاجلاً أن  
يؤدى عمله فى جميع أيام الأسبوع ؟ وماهى الإجابة بالنسبة  
لكل من الرجال الآخرين ؟ ( استخدم ورق مربعات يحتوى  
على سبعة مربعات فى كل صف وذلك لكى تأتى جميع أيام الجمع فى  
عمود واحد ، وبالمثل بالنسبة للأيام الأخرى ) .

٤ — هل تستطيع ملاحظة أية قاعدة تتبعها الإجابة عن



السؤال الثالث ؟ هل تستطيع إجابة السؤال : كم يمضي من الزمن إلى أن يقوم الجميع أحمد وبكرى وجميل وداوود وهانى بالحراسة فى نفس الليلة ؟ وأية ليلة من ليالى الأسبوع ستكون هذه الليلة ؟ .

٥ - يسير رجلان جنباً إلى جنب . وأحد الرجلين يسير أربع خطوات فى نفس الوقت الذى يسير فيه الثانى ثلاث خطوات . بدأ الرجلان السير معاً . ماهو الترتيب الذى سيسمع به صوت قدميهما ؟

( ارسم خطاً يمثل مرور الوقت وعين عليه اللحظات التى تطرق عندها قدما الرجلين الأرض ) .

٦ - يمكن تغيير السؤال حسب الرغبة - خمس خطوات مقابل أربع ، سبع خطوات مقابل خمس ... إلخ - وترسم الأشكال .

٧ - مطلوب عمل صندوق بحيث يمكن ملأه بالضبط إما بحزم طول الواحدة ست بوصات ، أو بحزم طول الواحدة ثمانى بوصات ، بحيث نوضع الحزم من إحدى نهايتى الصندوق إلى النهاية المقابلة . ما هو أصغر طول ممكن للصندوق ؟ .

### مسائل البحث

ليس من المعتاد أن يحل الرياضى مسألة ثم ينساها نسياناً تاماً . فإذا

حل مسألة، يبدأ في تغيير شروطها ويبحث فيما إذا كان لا يزال يمكنه حلها . فهو يريد أن يكون متأكداً من استطاعته الإجابة عن أى سؤال من هذا النوع قد يقابله في المستقبل . وهو يريد أن يكتشف ما إذا كانت هناك قاعدة بسيطة تحل المسألة على أساسها . ويمكنك أن ترى من المثالين الآتيين كيف يعمل الرياضي .

### مسائل كأس الفرق :

إذا دخلت سبع فرق في مسابقة بحيث لا يلعب أى فريق ثانية إذا هو هزم مرة ، فما هو عدد المباريات التي ستلعب ؟ ( افرض أنه لن يحدث تعادل أو إعادة مباراة ) .

في التصفية الأولى لابد من ترك فريق ، وتلعب ثلاث مباريات . في التصفية الثانية ستبقى أربع فرق وهو الدور قبل النهائي . ستكون هناك مباريتان في الدور قبل النهائي . ستلعب مباراة واحدة في الدور النهائي . عدد المباريات الكلى هو  $3 + 2 + 1$  ، على ذلك فالإجابة هي ٦

من السهل الإجابة عن هذا السؤال المعين . ولكن افرض أنه بدلا من سبع فرق كان هناك ٧٠ أو ٧٠٠ . ما هو عدد المباريات التي يجب لعبها في هذه الحالة ؟ إذا نحن حاولنا الإجابة عن السؤال بنفس الطريقة المباشرة السابقة فسيستغرق ذلك وقتا طويلا . إذا

أمكننا أن نجد قاعدة بسيطة توفر علينا حساب التصفيات واحدة  
فواحدة فإن ذلك سيساعدنا كثيراً .

ولكى يرى الرياضى ما إذا كان هناك قاعدة بسيطة ، يبدأ بحل  
أبسط الأمثلة الممكنة . إذا كان هناك فريق واحد فلن تلعب  
مباريات على الإطلاق . فى حالة فريقين يتحدد الموقف بمباراة  
واحدة . أوجد عدد المباريات التى يجب لعبها عندما يكون عدد  
الفرق ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ إلخ ستجد بسرعة أن هناك قاعدة بسيطة  
تربط بين عدد الفرق وعدد المباريات .

وأخيراً هل يمكنك ملاحظة السبب فى وجود هذه القاعدة  
البسيطة ؟ ما هو عدد المباريات اللازمة عندما يكون عدد الفرق  
٨٩٣، ١٧٦، ٢٠٩ .

### سائل الدرس :

يوجد لغز معروف هو ما يلى :

عين موظفان فى أحد المكاتب . أحمد سيصرف له مرتب  
سنوى قدره ١٠٥ من الجنيهات مع علاوة قدرها ١٠ جنيهات كل  
سنة . حسن يصرف له مرتب نصف سنوى قدره خمسون جنيهاً  
مع علاوة قدرها خمسة جنيهات كل نصف سنة . أى الموظفين  
حصل على الشروط الأفضل ؟

يدهش أغلب الناس عندما يرون حل هذه المسألة . كل ما نحتاج إليه لذلك هو أن نكتب ما يتسلبه كل من الموظفين كما يلي :

السنة	أحمد	حسن		المجموع
		يناير يونيو	يوليو ديسمبر	
	جنيه	جنيه	جنيه	جنيه
الأولى	١٠٥	٥٠	٥٥	١٠٥
الثانية	١١٥	٦٠	٦٥	١٢٥
الثالثة	١٢٥	٧٠	٧٥	١٤٥
الرابعة	١٣٥	٨٠	٨٥	١٦٥

من الطبيعي أن يظن الإنسان أن علاوة قدرها ٥ جنيهات كل شهر هي نفس الشيء كعلاوة قدرها ١٠ جنيهات ولكن الأمر ليس كذلك . المرتب السنوي لحسن يزداد بمقدار ٢٠ جنيها سنويا وهو قد حصل على شروط أفضل بكثير من أحمد .

ومن الطبيعي أن هذا السؤال يشير إلينا بأسئلة أخرى . علاوة قدرها خمسة جنيهات كل ستة أشهر تكافئ علاوة قدرها ٢٠ جنيها في السنة . ماذا يحدث لو أن صرف المرتب كان كل ثلاثة أشهر ؟ ماذا تعني كل ثلاثة أشهر بالنسبة للمرتب السنوي ؟ وماذا عن حالة صرف المرتب شهريا ؟ ماذا تعني علاوة قدرها جنيه

شهر يا بالنسبة لما يهرف فى سنة؟ ماذا تساوى علاوة قدرها شلن واحد أسبوعياً؟

أو السؤال العكسى — ماهى العلاوة نصف السنوية التى تعادل علاوة قدرها عشرة جنيهات سنوياً؟ كل ثلاثة أشهر؟ شهر يا، أسبوعياً .

ما هى القاعدة المتضمنة؟ لماذا تذهب الأمور هذا المذهب؟

**\*\* معرفنى \*\***

[www.ibtesama.com](http://www.ibtesama.com)

منتديات مجلة الإبتسامة



## الباب السادس

### كيف ننسى جدول الضرب

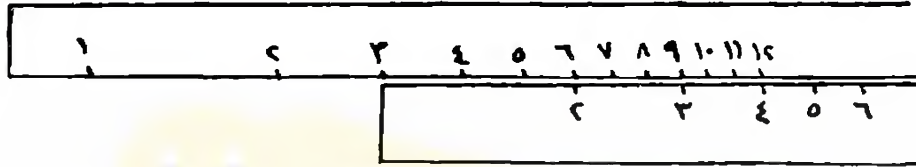
« ياسيدى ، لقد قطعت هذه الرحلة الطويلة لأرى شخصك ولأعرف أية عبقرية وأى ذكاء ذلك الذى جعلك تكون أول من فكر فى اللوغاريتمات التى تساعد كثيراً فى علم الفلك ، ولكن ياسيدى عندما وصلت إليك فإني أتمجب لماذا لم يكتشفها أحد من قبل . عندما عرفت أن ظهرت لى أنها سهلة للغاية »

من سيجز لنا بير (من كتاب تاريخ الرياضات) تأليف ف . لاهورى

إذا سألت مهندساً « ما هو ثلاثة أمثال أربعة » فإنه لا يجيب على الفور . لأنه يخرج آلة غريبة تسمى المسطرة الحاسبة من جيبه ويعبث بها لحظة ثم يقول « حوالى ١٢ » . قد لا يؤثر فيك ذلك كثيراً . ولكن إذا قلت له « ما هو حاصل ضرب ٣٧١ فى ٤٣٣ » فإنه سيستغرق فى إجابة هذا السؤال نفس الوقت الذى استغرقه السؤال الأول تقريباً وبدون أن يحتاج لكتابة أية أرقام .

ما هى المسطرة الحاسبة ؟ كيف تصنع ؟ كيف اخترعت ؟ كيف تستخدم ؟

تتركب المسطرة الحاسبة من مقياسين ، مكتوب على كل منهما الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ . . إلخ . والمسافات الموجودة بين الأرقام المتتالية ليست متساوية كما هو الحال بالنسبة للأعداد الموجودة على المسطرة العادية . المسافة بين ٢ ، ٣ أقل من المسافة بين ١ ، ٢ ، وكلما تقدمت مع الأعداد اقتربت الأعداد المتتالية من بعضها .



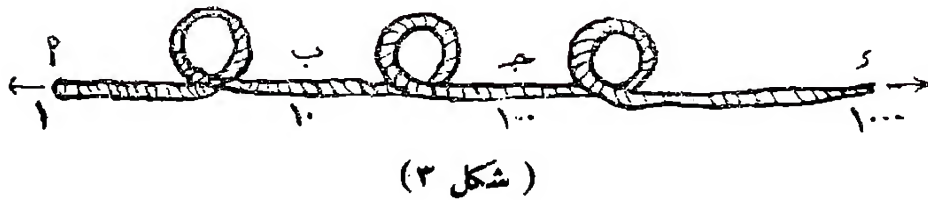
يبين هذا الشكل ٢ كيف يعد المهندس مسطرته الحاسبة لإيجاد  $3 \times 4$  . إنه يدفع المقياس السفلي إلى أن يصبح رقم ١ عليه مقابلاً لرقم ٣ على المقياس العلوي . والآن لاحظ كيف تتقابل الأرقام على المقياسين . فوق ٢ يقع الرقم ٦ : فوق ٣ يقع الرقم ٩ : فوق ٤ يقع الرقم ١٢ . فوق كل رقم على المقياس السفلي نجد ثلاثة أمثال الرقم على المقياس العلوي ، وعلى ذلك نقرأ الرقم الموجود فوق ٤ فنحصل على الجواب ١٢ .

ماهي القاعدة التي تعمل على أساسها هذه الآلة ؟ ما هو الطريق الذي أدى بأي شخص إلى أن يكتشفها ؟ وما السبب في إمكان عمل آلة للضرب عموماً ؟

توجد آلات مألوفة لنا جميعاً وهي الآلات التي يضاعف بها

الإنسان قوته الشخصية ، البكرات والروافع والتروس . . . إلخ .  
 افرض أنك ( خلال الحرب ) كنت تراقب الحرائق من سطح  
 منزل وكان عليك أن تنزل زميلاً مجروحاً بواسطة حبل . يكون  
 من الطبيعي أن تمرر الحبل على جسم ما ، أسطوانة خشبية مثلاً ،  
 وذلك لكي يساعدك الاحتكاك بين الحبل والخشب على التحكم في  
 سرعة سقوط صديقك . تستخدم بنفس الفكرة أيضاً مع الحبل :  
 يمر حبل حول عمود ويمسك رجل بأحد طرفي الحبل بينما يربط  
 الطرف الثاني في الحصان . إذا أراد الحصان الانطلاق فعليه أن  
 يبذل مجهوداً أكبر بعدة مرات من المجهود الذي يبذله الرجل .  
 يتوقف تأثير مثل هذه الطريقة على خشونة الحبل . دعنا  
 نفترض أن لدينا حبلًا وعموداً يزيدان القوة إلى عشرة أمثالها  
 وذلك عندما يدور الحبل دورة كاملة .

ماذا سيكون التأثير إذا كان لدينا مجموعة من مثل هذه الأعمدة  
 جذب شدته باوند عند ١ يكفي لأن يعادل جذب ١٠ باوند عند  
 ب ، وهذا سيعادل جذب ١٠٠ باوند عند ج أو ١٠٠٠ باوند  
 عند د ( شكل ٣ ) .



كل عمود إضافي يضاعف عشرة مرات وعمود واحد يعطى عشرة أضعاف : اثنان يعطيان  $10 \times 10$  ضعفاً : ثلاثة تعطى  $10 \times 10 \times 10$  ضعفاً . وحيث إنه يلزم حيز كبير لكتابة الصفوف الطويلة من العشرات ، يستخدم عادة اختصار لكتابتها . تكتب  $10^2$  بدلا من  $10 \times 10$  و  $10^3$  بدلا من  $10 \times 10 \times 10$  وهكذا . ( بنفس الطريقة  $10^8$  ستعني  $8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$  ) . وعلى ذلك فإن  $10^8$  ستمثل تأثير ٨ أعمدة و  $10^{11}$  تأثير ١١ عموداً . هذا هو التأثير المضاعف . إذا مررنا حبلا حول ثمانية أعمدة ثم بعد ذلك حول أحد عشر عموداً آخرين فإن التأثير سيكون  $10^8 \times 10^{11}$  . ولكن مجموع ٨ أعمدة ، ١١ عموداً هو ١٩ ، وبالتالي فإن ذلك لا بد أن يكون هو  $10^{19}$  بالضبط .

عدد الدورات اللازمة للحصول على أى عدد يسمى لوغاريتم هذا العدد . فمثلا يلزمك ٦ أعمدة لتضاعف قوتك ١٠٠٠٠٠٠ من المرات . وعلى ذلك فإن ٦ هي لوغاريتم ١٠٠٠٠٠٠ . وببنفس الطريقة ٤ هي لوغاريتم ١٠٠٠٠ .

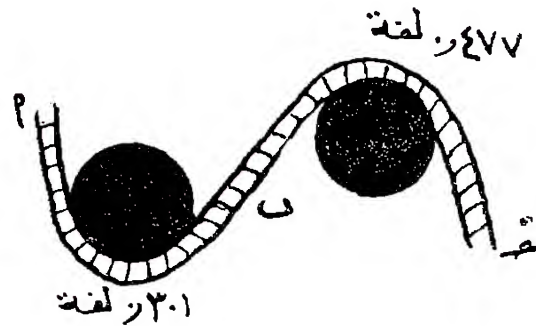
حتى الآن اقتصر كلامنا على الدورات الكاملة . ولكن يمكن تطبيق نفس الفكرة للدورات غير الكاملة . إذا أخذت بالتدرج في لف حبل حول عمود ، يزداد التأثير بالتدرج أيضاً . في البداية يجب أن تتحمل أنت الوزن الكلى . وكلما لف الحبل حول

العمود ، يأخذ الاحتكاك في مساعدتك وستأتى مراحل يمكنك عندها أن تعادل ضعف ، ثلاثة أضعاف ، أربعة أضعاف مقدار جذبك . وعندما تنم لفة كاملة ستصل إلى عشرة أضعاف مقدار جذبك .

وتبعاً لذلك فإن  $10 \frac{1}{2}$  تعنى تأثير نصف لفة ،  $10 \frac{2}{3}$  تأثير  $2 \frac{2}{3}$  من اللفات وبالمثل بالنسبة لآى عدد .

لو غاريتم ٢ سيكون هو جزء اللفة اللازم لمضاعفة قوة جذبك مرتين . ويسمى هذا العدد عادة « لو ٢ » للاختصار . والواقع أن  $0.301$  من اللفة يلزم المضاعفة قوة الجذب مرتين ،  $0.477$  من اللفة يضاعف قوة الجذب ثلاث مرات ١ وبالتالي فإن لو ٣ =  $0.477$  ( هذه الأعداد يمكن الحصول عليها بالتجربة ) . يمكن أن نكتب ذلك بطريقة عكسية . ٢ هو تأثير  $0.301$  من اللفة إذن  $2 = 10^{0.301}$  . بنفس الطريقة  $3 = 10^{0.477}$

والآن ماذا يحدث لو أننا لفنا  $0.301$  من اللفة حول عمود، ثم  $0.477$  من اللفة حول عمود آخر ؟



( شكل ٤ )



نعلم أن تأثير اللف على العمود الأول هو مضاعفة مجهودنا .  
إذا جذبنا ١ بقوة وزن باوند فإن ذلك سيكون لمعادلة شد قدره ٢  
وزن باوند عند ب ( شكل ٤ ) . والعمود الثاني يعطى ثلاثة  
أضعاف : ٢ وزن باوند عند ب ستعادل ٦ وزن باوند عند ح .  
وعدد اللفات على العمودين معا ،  $0.301 + 0.477 = 0.778$   
من اللفة .

٠.٧٧٧ من اللفة يلزم للمضاعفة ستة أضعاف . ٠.٧٧٨ هو  
لوغاريتم ٦ . وجدنا لوغاريتم  $3 \times 2$  بجميع لو ٢ ولو ٣ .  
ليس من الضروري استخدام أعمدة مختلفة . يمكننا التوفير في  
الخشب بلف الحبل مراراً على نفس العمود . الشيء الوحيد الذي  
له تأثير هو طول الحبل الملامس للخشب . ( العمود نفسه لا بد  
أن يكون أسطوانياً . الأركان ستسبب تعقيدات ) .  
إذا أعطينا قطعتين من الحبل وكنا نعلم أن إحدى القطعتين  
تكفي لإعطاء سبعة أضعاف وأن الأخرى تكفي لإعطاء ثمانية  
أضعاف ، فيكفي فقط أن نربط نهايتي القطعتين معا لنحصل على  
قطعة تعطي  $7 \times 8$  ضعفاً .

وهذه الفكرة ، أى ربط إحدى نهايتي الحبل الأول بنهاية  
الثاني ، هي بالضبط نفس الفكرة التي تستخدم في المسطرة  
الحاسبة . على المسطرة الحاسبة ، البعدين ١ ، ٣ هو طول الحبل  
اللازم لإعطاء ثلاثة أضعاف ، والبعد بين ١ ، ٤ يساوي طول

الحبل اللازم لإعطاء أربعة أضعاف ، وعند إيجاد  $3 \times 4$  نضع هذين الطولين بحيث تنصل نهاية الأول بنهاية الثاني .  
الواحد يأتى طبعا فى نهاية المقياس ، وذلك لأنه لا يلزمك أى حبل لتضرب قوتك فى ١ .

ستصبح الآن قادراً على معرفة السبب فى ازدحام الأعداد على المسطرة الحاسبة كلها تقدمنا . ١ ينظر عدم وجود حبل ، ١٠ تناظر لفة واحدة ، ١٠٠ تناظر لفتين ، ١٠٠٠ تناظر ٣ لفات . البعد على المسطرة الحاسبة بين ١ ، ١٠ هو نفس البعد بين ١٠ ، ١٠٠ ، أو بين ١٠٠ ، ١٠٠٠ : كل من هذه الأبعاد يساوى لفة كاملة واحدة . ولكن لا يوجد لدينا إلا تسعة أعداد واقعة بين ١ ، ١٠ : يوجد ٩ عدداً بين ١٠ ، ١٠٠ ، ٩٠٠ بين ١٠٠ و ١٠٠٠ . هذا هو السبب فى ازدحام الأعداد الكبيرة .

إذا أردنا أن نحصل على مجموعة من الأعداد التى يتساوى البعد بين كل اثنين متتاليين منها ، فيجب علينا أن نأخذ مجموعة مثل ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ أو ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٠٠٠ فى المجموعة الأولى كل عدد يساوى عشرة أمثال العدد السابق له : توجد لفة واحدة بين كل عدد والتالى له .

فى المجموعة الثانية كل عدد يساوى ضعف سابقه : عند كل خطوة نضيف حبلا طوله ٠٣٠١ من اللفة .

### كيف نحسب اللوغاريتمات

لقد فسرنا ما هو اللوغاريتم ، ولكننا لم نبين كيف نحسبه . لقد قلنا إن البعد على المسطرة الحاسبة بين ١ ، ٧ هو طول الحبل اللازم للمضاعفة سبعة أضعاف ، أى لو ٧ . ولكن لنصنع مسطرة حاسبة فعلية يلزم أن نعرف لو ٢ ، لو ٣ ، لو ٤ ، ٠٠٠ إلخ ، وذلك لى يمكننا أن نكتب ٢ ، ٣ ، ٤ عند الأبعاد المناظرة .

اللوغاريتمات الوحيدة التى وجدناها حتى الآن هى لوغاريتمات ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ٠٠٠ إلخ . نحن نعلم أن قيم هذه اللوغاريتمات هى ١ ، ٢ ، ٣ ... وكل ما نستخلصه من ذلك بالنسبة إلى لو ٧٠ هو أن قيمته يجب أن تقع بين ١ ، ٢ ، وذلك لأنه يلزمنا أكثر من لفة ولكن أقل من لفتين لإنتاج أى عدد بين ١٠ ، ١٠٠ .

ويوجد شىء آخر غير واضح . لقد تكلمنا طول الوقت عن عدد من اللفات « اللفات » الكاملة ولكن قطر العمود لم يحدد الواقع . إنه يمكننا أخذ عمود أسطوانى مهما كان قطره ، ونمرر

حبلًا حوله . هذا التنظيم قد يضاعف الجذب بأقل من عشرة أضعاف . نستطيع أن نصحح ذلك بزيادة خشونة العمود . وبالتالي يمكننا أن نفترض أن « اللفة » الواحدة تمثل أى طول نرغب فيه يمكن صنع المسطرة الحاسبة بأى أبعاد نريدها . يمكننا مثلاً أن نضع ١ عند نهاية المقياس ، ١٠ على بعد قدم . ستقع ١٠٠ على بعد قدمين من ١ ، ١٠٠٠ على بعد ثلاثة أقدام ، وعند ذلك سندشعر أن الجهاز أصبح كبيراً بدرجة كافية . لاحظ أن حاجتنا البسيطة لم تساعدنا إلا على الحصول على أربعة أعداد فقط على المسطرة — ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠

ولكن يمكننا معالجة المسألة بطريقة أخرى . إذا بدأنا من ١ وضاعفنا باستمرار ، سنحصل أيضاً على مجموعة من النقاط البعد بين كل اثنتين متتاليتين منها هو نفسه : البعد بين كل نقطة والتي تليها هو لو ٢ . ( ذكرنا فيما سبق أن لو ٢ هو ٣.٠١٠ ، ولكننا لم نعطي سبباً لذلك ) . بدلاً من تحديد مقياسنا بأخذ ١٠ على بعد قدم من ١ . افرض أننا نحدده بأخذ ٢ على بعد مناسب . قد نختار هذا البعد بحيث يكون بوصة واحدة من ١ . وحيث إن ٤ هى  $2 \times 2$  فيجب أن يكون موضعها على بعد بوصتين من ١ ، وبما أن  $8 = 2 \times 4$  سيكون بعدها ٣ بوصات ، ١٦ على بعد ٤ بوصات ، ٣٢ على بعد ٥ بوصات ، ٦٤ على بعد ٦ بوصات ،

١٢٨ على بعد ٧ بوصات ، ٢٥٦ على بعد ٨ بوصات ، ٥١٢ على بعد ٩ بوصات ، ١٠٢٤ على بعد ١٠ بوصات . هذه المسطرة الحاسبة ظهر أنها أصغر من السابقة . في هذه الحالة تقع النقطة ١٠٠٠ على بعد يقل قليلا عن ١٠ بوصات من النقطة ١ . ولكن ليست هذه هي النقطة المهمة . الشيء الأساسي الذي نلاحظه هو أن المسطرة الأولى لم يكن عليها إلا أربع نقط — ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ولكن محاولتنا الثانية أعطتنا إحدى عشرة نقطة ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، ١٢٨ ، ٢٥٦ ، ٥١٢ ، ١٠٢٤ .

وهذا يبين أنه يمكننا الحصول على نتائج أفضل لو أننا أخذنا بدلا من ١٠ ، ٢ عدداً ما يكون أقرب إلى ١ ، مثل  $\frac{1}{8}$  أو  $\frac{1}{10}$  أو ١٠٠٠ . سيلازم عمل أكثر للوصول من ١ إلى ١٠٠٠ إذا نحن استخدمنا أعداداً أصغر ، ولكن بمجرد أن نصنع المسطرة الحاسبة سنتمكن من استخدامها كلها دعت ضرورة لإجراء عمليات الضرب وبالتالي سنكافأ على مجهودنا .

وقبل أن نترك المسطرة الحاسبة ذات الإحدى عشرة نقطة ، نلاحظ أنها تمكنتنا من الحصول على فكرة تقريبية عن قيمة لو ٢ . لقد رأينا أن ١٠٢٤ وقع بعد ١٠ بوصات وبالتالي فإن ١٠ بوصات من الحبل تضاعف مجهودنا بمقدار ١٠٢٤ ضعفاً ، ولكننا نعلم أن ثلاث لفات كاملة تضاعف المجهود ١٠٠٠ ضعفاً .



وبالتالى فإن ١٠ بوصات لا بد وأن تزيد قليلا على ثلاث لفات كاملة . البوصة الواحدة يجب ألا تزيد إلا قليلا على  $\frac{2}{3}$  أو ٠.٣ من اللفة . ولكن الرقم ٢ موجود على بوصة واحدة . وعلى ذلك فإن ٢ تناظر أكثر قليلا من ٠.٣ من اللفة ، وهذا يعنى أن لو ٢ لا يزيد إلا قليلا على ٠.٣ . أى أن ما ذكرناه سابقاً من أن لو ٢ هو ٠.٣٠١ هو على الأقل قريب من الحقيقة .

### كيف اكتشفت الموغار بنمات

لقد صنعنا مسطرتنا الحاسبة الثانية بعملية مضاعفة مستمرة . سنصنع الآن مسطرة أفضل مستخدمين ١,١ بدلا من ٢ و افرض أننا نحدد نقطتين على المقياس الذى نستخدمه وذلك لتمثيل ١,١ و ١. يمكن أن يكون البعد بينهما  $\frac{1}{2}$  بوصة مثلا . وعلى ذلك فنحن نعلم أن مسافة مقدارها  $\frac{1}{2}$  بوصة على المقياس ( أو إذا كنت تفضل ذلك ، أن إضافة  $\frac{1}{2}$  بوصة إلى طول الحبل ) يمثل الضرب فى ١,١ . وسنتمكن إذن من وضع النقط ١,١ ، ١,١ ، ١,٢١ ، ١,٣٢١ ، ... إلخ . حيث كل عدد يساوى مرة وعشر مرة مما قبله .

هذه الأعداد هى نفسها الأعداد التى تحصل عليها إذا أنت

حسبت جملة مبلغ جنيته بربح ١٠ ٪ في السنوات المختلفة ، كل سنة تمر تزيد المبلغ المستثمر بمقدار عشر — أو بعبارة أخرى كل سنة تمر تضاعف المبلغ بمقدار ١,١ من المرات . من المحتمل أن يكون الشيء الذي أوحى بفكرة اللوغاريتمات لمخترعها ناير هو دراسة جداول الربح المركب .

يبين الجدول الآتي بعض الأعداد التي نجدها بهذه الطريقة والأبعاد التي تكتب عندها على المسطرة ..

العدد	البعد بالبوصة
١,٩٤٨	٠,٧
٢,١٤٣	٠,٨
٢,٨٥٢	١,١
٣,١٣٧	١,٢
٥,٠٥٣	١,٧
٦,٧٢٥	٢,٠
٧,٢٩٧	٢,١
٩,٨٤٦	٢,٤
١٠,٨٣١	٢,٥
١٣٤	

وهذا يبين أن الرقم ٢ يجب أن يقع على بعد بين ٠,٧ و ٠,٨ من البوصة ، ٥ على بعد أقل قليلا ١,٧ بوصة ، ٧ على بعد بين ٢,١ ، ٢,٤ بوصة ، ١٠ على بعد أكبر قليلا من ٢,٤ بوصة . وبالتالي فإن ، اللفة الكاملة ، تناظر طولاً أكبر قليلا من ٢,٤ بوصة . هذه المعلومات لا تزال غير كافية لعمل مسطرة حاسبة جيدة بدرجة كافية . فمثلا نحن لا نستطيع نجد الوضع المضبوط للعدد ٧ . والجدول الذي أعطيناه لا يحتوى على أعداد بين ٦,٧٢٥ ، ٧,٢٩٧ لا يمكننا إلا التخمين بمكان العدد ٧ بين هذين العددين . الواقع أن هذه المسطرة الحاسبة هي عرضة لأخطاء تساوى ١٠٪ تقريبا وذلك نتيجة لحقيقة أن الأعداد يحصل عليها بإضافة ١٠٪ كل مرة — لا يمكن أن ننتظر أية درجة أعلى من الدقة . يمكننا استخدام هذا الجدول في إيجاد لوغاريتمات الأعداد ٢، ٣، ٤، ٥... إلخ ولكن النتائج التي نحصل عليها ستكون تقريبية في الغالب . ، لفة واحدة ، هي البعد المناظر للعدد ١٠ : وننحن هذا البعد على أنه ٢,٤٢ بوصة . والعدد ٢ يناظره بعد بين ٠,٧ و ٠,٨ من البوصة — ربما ٠,٧٣ . إذا عبرنا عن ٠,٧٣ كجزء من لفة ستحصل على قيمة لو ٢ على أنها خارج قسمة ٠,٧٣ على ٢,٤٢ ، وهذا يعطى ٠,٣٠١٦ . — وهي نتيجة جيدة بالنسبة لمجرد الحدس وهو أمر يثير الشك .

ويستطيع القارىء أن يتصور درجة الدقة التي يمكن أن ترقى إليها المساطر الحاسبة وجداول اللوغاريتمات باستخدام عدد مثل ١,٠٠٠٠٠١ للضرب المتتالى . عند عمل أول جداول للوغاريتمات استخدام نابير العدد ١,٠٠٠٠٠١ .

ليس من الضروري طبعاً أن تقوم بعمل جداول لوغاريتمات خاصة بنا . لقد تم هذا العمل مرة وانتهى منه . والميزة الوحيدة التي تكسبها من عمل جداول لوغاريتمات ومسطرة حاسبة لنفسك هي فهمك للقواعد الأساسية للموضوع .

تبين الطريقة المشروحة فيما سبق لعمل جداول اللوغاريتمات السبب في إمكان استخدام هذه الجداول لإجراء عمليات الضرب لقد وجدنا ، مثلاً ، أن الضرب في ١,١ سبع مرات يكافئ تماماً الضرب في ١,٩٤٨ مرة واحدة ، وأن الضرب في ١,١ سبع عشرة مرة يكافئ الضرب في ٥,٠٥٣ مرة واحدة (انظر الجدول السابق) . وبالتالي فإن ١,٩٤٨ × ينظر ٥,٠٥٣ الضرب ١,١ سبع مرات متتالية متبوعاً بسبع عشرة مرة أخرى — أى ينظر الضرب في ١,١ ٢٤ مرة متتالية وهذا ( من الجدول ) ينظر ٩,٨٤٦ . وعلى ذلك فإن ١,٩٤٨ × ٥,٠٥٣ = ٩,٨٤٦ .

الطريقة واضحة ١,٩٤٨ هو العدد السابع ، ٥,٠٥٣ هو العدد

السابع عشر  $7 + 17 = 24$  ، فالعدد الرابع والعشرون في الجدول يعطى الإجابة .

عند عمل مسطرة حاسبة خاصة بك ، ضع ١,١ على بعد عشر بوصات من ١ ، ١,٩٤٨ على بعد يساوى سبعة أمثال البعد السابق وهكذا . بعد العدد ١,١ عن ١ لا يهم مادام العدد ١,٩٤٨ يقع على مسافة تساوى سبعة أمثال هذا البعد ، والعدد ٥,٠٥٣ على مسافة تساوى ١٧ مرة من هذا البعد ، وهكذا لا تزال الحجج صحيحة .

في اللوغاريتمات العادية لو ١٠ هو ١ . رأينا في مسطرتنا الحاسبة أن ١٠ تقع على بعد بين ٢٤ ، ٢٥ مرة بعد ١,١ . إذا اخترنا بعد ١,١ بحيث يقع بين  $\frac{1}{3}$  ،  $\frac{1}{2}$  من البوصة فإن ١٠ ستقع على بعد بوصة واحدة . وسيصبح البعد المناظر لآى عدد مساوياً للوغاريتم العدد .

هذا التغيير في المقياس يخفى بعض الشيء العلاقة  $24 = 17 + 7$  وفي جداول اللوغاريتمات ١,١ تناظر ٥,٠٤١٤ ، ١,٩٤٨ يناظر ٥,٢٨٩٦ ، ٥,٠٢٣ يناظر ٥,٧٠٣٦ . لأول وهلة لا يبدو أن هناك ارتباطا بسيطا بين هذه الأعداد . ولكن لاحظ هذه الحقائق (١) لو ١,١ يقع بين  $\frac{1}{3}$  ،  $\frac{1}{2}$  كما توقعنا . (٢) لو ١,٩٤٨ هو سبعة أمثال لو ١,١ ولو ٥,٠٥٣ هو سبع عشرة مرة لو ١,١ . لا تزال



العلاقات البسطة مجردة . تغيير المقياس لا يغير الطريقة على الإطلاق : لضرب الأعداد نجمع لوغاريتماتها .

إذا طلب منا أن نحسب قيمة مقدار مثل  $12^{30}$  — أى تأثير ضرب العدد ١٢ فى نفسه خمس وثلاثين مرة — فإن ذلك يمكن أداؤه بسهولة . لضرب ١٢ فى عدد يجب علينا أن نجمع لو ١٢ على لوغاريتم العدد . إذا ضربنا العدد ١٢ فى نفسه خمساً وثلاثين مرة فعلينا أن نجمع لو ١٢ خمساً وثلاثين مرة . لو ١٢ هو ٠.٧٩٣، وحاصل ضرب هذا العدد فى ٣٥ هو ٣٧,٧٧٢ . العدد الذى لوغاريتمه ٣٧,٧٧٢ هو ٥٩١٦ متبوعاً بأربعة وثلاثين صفراً ! وعلى ذلك فهذه هى النتيجة التقريبية لضرب العدد ١٢ فى نفسه ٣٥ مرة . سيلازم وقت طويل نسبياً للحصول على هذه النتيجة بأية طريقة أخرى .

### مسطرة هاسبه موسيقية

مفاتيح البيانو ، المعروفة للجميع ، هى فى الواقع مسطرة حاسبية . تتذبذب الأوتار الموجودة أسفل البيانو ببطء ، وكلما ذهبنا بعيداً على المفاتيح ازداد معدل الذبذبة . جواب النغمة ( الأوكتاف ) يناظر مضاعفة التردد ، أى معدل الذبذبة .

تتذبذب كل نوتة حوالى ٦ ٪ أسرع من النوتة التى أسفلها مباشرة . كل مرة يذهب الإنسان مسافة معينة على المفاتيح يضاعف التردد عدداً مناظراً من المرات . هذا هو نفس ما يحدث على المسطرة الحاسبة .

## تمارينات

١ - إذا أمكنك الحصول على مسطرة حاسبة وجداول لوغاريتمات فحقق صحة العبارة الموجودة فى الكتاب والتى تنص على أن كل عدد فى المسطرة الحاسبة موجود على بعد يتناسب مع لوغاريتمه .

٢ - اصنع مسطرة حاسبة لنفسك باستخدام جداول اللوغاريتم لتعرف أين يجب أن يوضع كل عدد .

٣ - اصنع مسطرة حاسبة بالطريقة المشروحة فى الباب السادس .

٤ - أين يقع الجذر التربيعى للعدد ١٠ على المسطرة ؟

٥ - اختبر دقة مسطرتك الحاسبة بإجراء العمليات  $2 \times 2$  ،  $2 \times 3$  ،  $3 \times 4$  ،  $5 \times 5$  عليها وكذلك عمليات ضرب بسيطة أخرى .

٦ - لو غار يتم ٢ هو ٠٠٣٠١ لو غار يتم ١٠٥ هو ٠٢١٢ ،  
ما الزمن اللازم لمبلغ مستثمر بربح ٥ ٪ لكي يضاعف قيمته ؟

٧ - يرسل أحد الملوك ١٠٠٠٠ إناء ذهبي إلى ملك آخر  
تقع مملكته على بعد مسيرة عدد كبير من الأيام . حملت الهدية  
على الجمال . كل تاجر يورد الجمال لجزء من الرحلة يطلب كعمولة  
١٠ ٪ من البضاعة التي تحملها جماله . وبالتالي فإن التاجر الأول  
لا يسلم للثاني ١٠٠٠٠ إناء ذهبياً وإنما ٩٠٠٠ فقط . إذا مرت  
الأنية بين يدي عشرين تاجراً ما هو عدد الأواني التي يتسلمها  
الملك الثاني في النهاية ؟

**\*\* معرفتي \*\***  
**www.ibtesama.com**  
**منتديات مجلة الابتسامه**

## الباب السابع

### الجبر — اختزال الرياضة

« الرياضة لغة »

« ج . ويلارد جيز »

يلعب الجبر دوراً في الرياضيات يمكن مقارنته بالكتابة أو بالاختزال في الحياة العادية . يمكن استخدام الجبر إما لذكر عبارة وإما لإعطاء تعليمات وذلك في صيغة مختصرة .

الاختزال وحده لا يحمل الاكتشافات الجديدة ممكنة . وعلى هذا الأساس أغلب المسائل التي يمكن حلها بالجبر يمكن أيضاً أن تحل باستخدام العقل . ويمكن ترجمة عبارات الجبر إلى كلام عادي وبالعكس . العبارة الجبرية أقصر بكثير : بعض الحقائق أو التعليمات التي يمكن كتابتها بسهولة في صيغة جبرية تكون طويلة ومعقدة عند التعبير عنها بالكلام العادي . هذه هي ميزة الجبر : بينما يمكن الحصول على النتائج بدونه ، فإن احتمال ذلك قليل .

سنعرض هنا لبعض الأسئلة البسيطة — أمثلة ربما تكون

غير مفيدة للغاية - لتوضيح الصورة التي تعطى للجالات العقلية عند استخدام الرموز الجبرية .

## مسألة الكعك والفطائر

أغلب كتب الجبر في باب « المعادلات الآتية » ، تعالج مسألة ما كالمسألة الآتية « دخلت قاعة شاي مرتين . في المرة الأولى طلبت شطيرتين وكعكة واحدة ودفعت أربعة قروش . في المرة الثانية طلبت ثلاث شطائر وكعكتين ودفعت سبعة قروش . ماهو سعر الشطائر والكعك ، ؟ » .

لقد حاولت هذه المسألة مع أشخاص لا يعرفون شيئاً عن الجبر وتمكنوا في أغلب الأحيان من حلها . فهم يقولون : لقد دفعت في المرة الثانية ثلاثة قروش أزيد من المرة الأولى . وبالتالي فإن ثلاثة قروش تمثل ثمن الشطيرة والكعكة الزائدين . وثمان شطيرتين وكعكة هو أربعة قروش . إذن الفرق هو ثمن شطيرة ، أى أن ثمن الشطيرة هو قرش واحد . وأيضاً ثمن الكعكة يجب أن يكون قرشان .

قد لا تبدو هذه المسألة هامة ، ومع ذلك فهي تتكرر في صورة



أو أخرى في البحوث الرياضية ذات الصيغة العملية . وسنحاول حل مسألة من هذا النوع في الباب الثامن .

وعلى ذلك فقد أجبر الرياضيون على تطبيق طريقة الجدل المشروحة فيما سبق في مناسبات كثيرة مختلفة . وبالتدريج أخذوا، مثل الناس الآخرين، في إدخال اختصارات لتقصير العمل يمكن أن تتخيل ما شرحناه مكتوباً على الصورة :

٢ شطيرة و ١ كعكة = ٤ قروش

٣ شطيرة و ٢ كعكة = ٧ قروش

١ شطيرة و ١ كعكة = ٣ قروش

٢ شطيرة و ١ كعكة = ٤ قروش

١ شطيرة = ١ قرش

١ كعكة = ٢ قرش

وفيما بعد سنبدأ في كتابة « ش » بدلا عن شطيرة ، « ك » بدلا من كعكة . إذا استبدلنا « و » بالإشارة + نحصل على الصورة الحديثة :

$$2 \text{ ش} + 1 \text{ ك} = 4$$

$$3 \text{ ش} + 2 \text{ ك} = 7$$

$$1 \text{ ش} + 1 \text{ ك} = 3 \quad \text{وعلى ذلك}$$

ولكن ٢ ش + ك = ٤

اذن ش = ١

و ك = ٢

فيما سبق تدل ش على عدد القروش التي تدفع في شطيرة ، ك عدد القرش التي تدفع في كعكة . ستلاحظ أننا كتبنا ٢ ش للدلالة على ضعف العدد ش . لا تكتب أية علامة ضرب بين ٢ ، ش . لا توجد فائدة في المجادلة ما إذا كان من الضروري كتابة علامة الضرب في هذا المكان . إذا كنت تشعر بارتياح أكثر بالصورة ٢ × ش فاكتبها بهذه الطريقة .

طبعاً ١٢ ش تعني اثنتي عشرة مرة ش ، وليس ١ × ٢ × ش . قد تشعر أن هذه التفرقة تثير اللبس — ولكن كل نظام اختزال له عيوبه . وفي الجبر الأعداد مثل ١٢٣ المكتوبة إلى جانب بعضها البعض لها نفس المعنى كما في الحساب ، ولكن ٢ ب ح تعني ٢ × ب × ح .

حاول أن تترجم إلى لغة عادية العبارات الآتية :

ش + ك + ق = ٦

٢ ش + ٣ ك + ق = ١١

٤ ش + ٨ ك + ق = ٢٣

ش ، ك لهما نفس المعنيين السابقين ، ولكن مع كل مرة يوجد فنجان قهوة ثمنه ق قرشاً . هذه المسألة أيضاً يمكن حلها بسهولة . إذا اعتبرت الفرق بين الثمن في الحالتين الأولى والثانية سنحصل على معادلة تحتوى على ش ، ك فقط . وبمقارنة الحالتين الثانية والثالثة ، سنحصل على عبارة أخرى لا يظهر فيها ثمن القهوة . لديك الآن عبارتان عن الشطائر والكعك :



$$\text{ش} + ٢ \text{ ك} = ٥$$

$$٢ \text{ ش} + ٥ \text{ ك} = ١٢$$

إذا كان ثمن شطيرة وكعكتين هو خمسة قروش ، فإن ثمن شطيرتين وأربعة كعكات ، ضعف المقدار ، أى عشرة قروش . وعلى ذلك فإن  $٢ \text{ ش} + ٤ \text{ ك} = ١٠$  . ولكن لدينا  $٢ \text{ ش} + ٥ \text{ ك} = ١٢$  . بمقارنة هاتين المعادلتين سنرى أن  $٢ = ك$  . إذن  $ش = ١$  ، وبالرجوع إلى الحالة الأولى نجد أن  $ق = ٣$  .

كقاعدة عامة لا توجد صعوبة في حل المسألة من هذا النوع . يمكن استخدام هذا الاختزال أيضاً للنص على حقائق . إحدى الحيل القديمة هى كما يلي ، فكر فى عدد . أضف إليه ٦ . أضرب الكل فى ٢ . خذ ٨ من النتائج . أقسم على ٢ . خذ العدد

الذى فكرت فيه أولاً من النتائج ، . مهما كان العدد الذى  
فكرت فيه فإن الجواب هو ٢ دائماً . لماذا ؟

كلمات	صور	جبر
١ - فكر فى عدد		ن
٢ - أضف إليه ٦		ن + ٦
٣ - أضرب فى ٢		٢(ن+٦) أو ٢ن+١٢
٤ - خذ ٨ من النتائج		٢(ن+٦) - ٨ أو ٢ن+٤
٥ - أقسم على ٢		$\frac{٢(ن+٦) - ٨}{٢}$ أو $\frac{٢ن+٤}{٢}$
٦ - خذ العدد الذى فكرت فيه أولاً من النتائج		$\frac{٢(ن+٦) - ٨ - ٢}{٢}$ أو $\frac{٢ن+٤ - ٢}{٢}$
٧ - الجواب هو ٢		$\frac{٢(ن+٦) - ٨ - ٢}{٢} = ٢$

كل كيس مفروض أنه يحتوى على عدد من البلى يساوى العدد  
الذى فكرت فيه ، مهما كان هذا العدد .

نفس الصورة يمكن فى أغلب الأحيان وضعها بطرق مختلفة .

فمثلاً يمكننا أن نصف الصورة ه كما يلي د كيس وست بليات ،  
مكررة مرتين ، أو مجرد ، كيسين ، ١٢ بلية . في الاختزال الجبرى  
هذه الأوصاف نأخذ الصورة ٢ ( ن + ٦ ) ، ٢ ن + ١٢ .

يمكننا أن نحل هذا اللغز بالتفكير في صور . ففكر في عدد  
— أى عدد — سنتخيل هذا العدد بلياً موضوعاً في كيس .  
أضف ٦ إليه ، هذا يعطينا كيساً وست بليات . اضرب  
في ٢ ، ينتج كيسان واثنى عشرة بلية ، خذ من الناتج ٨ ، ينتج  
كيسان وأربع بليات . اقسم على ٢ ، ينتج كيس وبليتان .  
خذ من الناتج العدد الذى فكرت فيه أولاً — أى خذ الكيس ،  
تبقى بليتان مهما كان عدد البلى الموجود فى الكيس .

فى الجبر لا نحتاج للكلام عن الأكياس والبلى . نقول :  
لتكن ن العدد الذى فكرت فيه أضف ٦ ، نحصل على ن + ٦  
اضرب فى ٢ ، ٢ ن + ١٢ ، اطرح ٨ ، ن + ٤ اقسم على ٢ ،  
ن + ٢ ، اطرح ن . الجواب هو ٢ .

يمكننا التعبير عن العملية بأكملها ، وحقيقة أن الجواب هو  
دائماً ٢ بكتابة المعادلة الوحيدة الآتية :

$$2 = \frac{(n + 6) - 8}{2}$$

يبين التعبير الموجود فى الطرف الايمن أنك تأخذ ضعف



(ن + ٦) و تطرح منه ٨ ثم تقسم الناتج على ٢ ، وأخيرا تطرح ن  
نستبدل فقرة من الكلام بسطر واحد من الرموز .

يبين هذا المثال أن عبارتين مختلفتين ظاهريا قد تمثلان في  
الواقع نفس الشيء . وبالتالي فإن جزءا كبيرا من علم الجبر ينحصر  
في معرفة التعبير عن أية نتيجة بأبسط طريقة ممكنة : ويعرف ذلك  
بالاختصار .

من الممكن أن يوجد للسؤال جوابان يبدو أن مختلفين لأول  
وهلة ولكن كل منهما في الواقع صحيح .

افرض مثلا أنك تجد القاعدة التي اختيرت بها الأعداد الآتية

٠ ، ٣ ، ٨ ، ١٥ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٦٤ . قد تلاحظ أن هذه الأعداد

تعطى بالقاعدة  $٢١ - ٢٢ ، ١ - ٢٣ ، ١ - ٢٥ ، ١ - ٢٦ ، ١ - ٢٧ ، ١ -$

$٢٨ - ١$  والعدد النوني هو  $٢ - ١$  . ( ستذكر من الباب السادس

أن  $٢٥$  هي اختصار  $٥ \times ٥$  ) وبالاختصار العدد النوني هو  $٢ - ١$

ولكنك تلاحظ أيضاً أن  $٦٣$  هو  $٧ \times ٩$  ، وأن  $٤٨$  هو

$٦ \times ٨$  ، وهكذا . العدد الثامن هو العدد السابق للعدد ٨ ( أي

٧ ) مضروباً في العدد التالي للعدد ٨ ( أي ٩ ) أول عدد صفر ،

هو العدد السابق للعدد ١ ( أي صفر ) مضروباً في العدد التالي

للعدد واحد ( أي ٢ ) . وهذا يشير إلينا بالقاعدة للعدد النوني :

اضرب العدد السابق للعدد ن ( وهو ن - ١ ) في العدد التالي

للعدد  $n$ ، وهو  $(n + 1)$  وهذا يعطى الصيغة  $(n - 1) \times (n + 1)$ .

كل من هاتين صحيح . مهما كان العدد  $n$  ستجد دائماً أن  $(n - 1) \times (n + 1)$  هو نفسه  $n^2 - 1$ .

استخدمنا هنا الرموز الجبرية كاختزال لكتابة تعليمات كيف نعرف الأعداد في مجموعة معينة . هذا الاستعمال للجبر كثير الحدوث . ليس من الضروري للشخص الذى يستخدم صيغة أن يفهم لماذا تكون هذه الصيغة صحيحة . فمثلاً إذا كان على أحد المهندسين العسكريين أن يفسف أحد كبارى السكك الحديدية فإنه سيحسب كمية المفرقات التى تلزم لذلك بواسطة قانون : ليس من الضروري بالنسبة له أن يعرف كيف وجد هذا القانون . وبمنفس الطريقة ، توجد قاعدة تقول : إذا أردت أن ترى أميالا عددها  $(n)$  من البحر فيجب أن تكون عينك على ارتفاع  $\frac{n^2}{3}$  عن سطح البحر . نحصل على هذا القانون من الهندسة ولكن

يمكنك استخدام هذا القانون بدون أن تكون لديك أية معرفة بالهندسة ، واكتشاف أن رجلاً طويلاً واقفاً على الشاطئ يمكنه أن يرى تقريباً ثلاثة أميال من البحر ( وذلك لأن  $\frac{2 \times 2^3}{3}$

أعطى ٦ قدم الارتفاع المطلوب )، بينما لرؤية ١٢ ميلا يلزمك أن تقف على صخرة ارتفاعها ٩٦ قدما . يمكن استخدام مثل هذا القانون في تصميم بارجة حربية لمعرفة الارتفاع الذى يجب أن يكون عليه المشاهد لرؤية تأثير مدافع البارجة .

أغلب القوانين تحتوى على حروف متعددة مختلفة فمثلا قد ترغب فى معرفة كمية المعدن التى تلزم لصنع أنبوبة دائرية يجب أن نعرف طول الأنبوبة وسمكها ومحيطها ومقطعها . فلنسم الطول ل والسمك س ، والمحيط الخارجى م من البوصات . يوجد قانون يدلنا على أن الأنبوبة فى هذه الحالة ستحتوى على ل س ( م - ٣١٤ س ) بوصة مكعبة من المعدن . وعلى ذلك فأنبوبة طولها ١٠ بوصة وسمكها ١/٢ بوصة ومحيطها ١٥ بوصة ستحتوى على :

$$10 \times \frac{1}{2} \times (3.14 - 15) = 13.43 \times 5 = 67.15$$
 بوصة مكعبة  
يمكن ذكر قاعدة مثل هذه بالكلام ، ولكنها تكون أطول من ذلك بكثير . الاختزال بسيط بدرجة أنه لن تنشأ أية صعوبة فى حفظ القانون : ل للطول ، س للسمك ، م للمحيط . ومع ذلك فكثير من الناس يرتعدون من رؤيه إحدى صفحات الرموز الجبرية ، وآخرون يظن فيهم الذكاء الخارق لأنهم يفهمون الجبر . فى العصور السابقة ، كان يعتقد أن الشخص الذى يستطيع

القراءة والكتابة ، كان يعتقد فيه أنه عالم . واليوم نحن لا نأبه على الإطلاق للقراءة والكتابة . الجبر أيضاً هو لغة – لا يزيد أو يقل في الغموض عن الكتابة العادية مادمنّا نعرف حروفه الهجائية وقواعده .

## أمثلة

١ – يمكننا التعبير عن التعليمات د فكر في عدد ( ن ) ، ضاعفه ، وأضف إلى الناتج ه ، بالعبارة المختزلة ٢ ن + ه ترجم إلى لغة الجبر المختزلة الجمل الآتية :

- أ – فكر في عدد ، أضف إليه ه ، ثم ضاعف الناتج .
  - ب – فكر في عدد ، اضربه في ٣ ثم أضف إلى الناتج ٣ .
  - ج – فكر في عدد . اكتب العدد التالي له . اجمع العددين .
  - د – اضرب عدد في العدد التالي له .
  - ه – فكر في عدد واضربه في نفسه .
- ٢ – ترجم الرموز المختزلة الآتية ثانية إلى جمل مثل الموجودة في السؤال الأول .

$$(١) \quad ٢ ن + ٤ \quad (ب) \quad ن - ١ \quad (ج) \quad ٣ (ن + ١) \\ (د) \quad \frac{١}{٤} (٤ ن + ٨) \quad (ه) \quad \frac{١}{٤} ن (ن + ١)$$

احسب ما تعطيه هذه الصيغ إذا كان العدد الذي فكرت فيه هو ٦ ثم إذا كان العدد هو ٣ .

٣ - لكي ترى  $n$  من الأميال من البحر يجب أن تكون عينك على ارتفاع  $\frac{1}{2}n$  عن سطح البحر . أوجد جدولاً يبين الارتفاع الذي يجب أن تكون عليه عينك لكي ترى ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ من الأميال .

٤ - لقد رأينا أن  $(1 - n)(1 + n)$  يعطي  $n^2 - 1$  بالضبط وقد اخترنا صحة ذلك بوضع  $n = 1, 2, 3, \dots, 8$  على التوالى . هذا لم يثبت أن تعبيرين يكونان متساويين دائماً وإنما جعل ذلك محتملاً . باستخدام هذه الطريقة يمكنك أن تبين احتمال صحة بعض النصوص المذكورة فيما يلي ، وأن البعض الآخر خاطئ بالتأكيد . بين إلى أي النوعين ينتمي كل نص . وتدل  $n$  هنا على أي عدد .

$$(1)(1 + n) + (1 - n) = n^2$$

$$(b) n = n^2$$

$$(c) 2(1 + n) = n^2 + 1$$

$$(d) (1 - n)(1 + n + n^2) = 1 - n^3$$

$$(h) 4 + n = n^2 \text{ هو دائماً عدد زوجي ( } n \text{ عدد صحيح )}$$



(و)  $n(n+1)$  هو دائماً عدد زوجي (  $n$  عدد صحيح )

$$(ز) (n+1)(n+1) = n^2 + 1$$

$$(ي) \frac{1}{1-n} + \frac{1}{1+n} = \frac{n^2}{1-n^2}$$

٥ - إذا كان يلزم  $a$  من الدقائق لإعداد آلة معينة للعمل ،  $b$  من الدقائق لصنع سلعة واحدة بالآلة ، فما هو الزمن اللازم لإعداد الآلة للعمل وصنع عشر سلع ؟

ما هو الزمن اللازم لإعداد الآلة للعمل وصنع عشر سلع عددها  $n$  ؟

أكتب على التوالى الزمن اللازم لإعداد الآلة وصنع سلعة واحدة ، لإعداد الآلة وصنع ساعتين ، ... إلخ .

٦ - في السؤال الخامس الزمن اللازم لصنع سلع عددها  $n$  بعد إعداد الآلة للعمل هو  $a + b n$  دقيقة . الجزء الأخير من السؤال يتطلب منا أن نضع في القانون  $a + b n$  ،  $n = 0$  ،  $1$  ،  $2$  ... على التوالى ، وهذا يعطى  $a$  ،  $a + b$  ،  $a + 2b$  . إلخ ووضع قيمة محددة بدلا من  $n$  في القانون يسمى التعويض عن  $n$  . وعلى ذلك فإن  $a + 2b$  هو نتيجة التعويض  $n = 2$  في القانون  $a + b n$  .

أيضاً إذا عوضنا  $n = 7$  في القانون  $n^2 - 1$  نحصل على

التوالى فى القانون  $\frac{2}{3}$  ن ٢ . لن تتمكن من متابعة الباب الثامن  
إلا إذا كانت هذه الفكرة مألوقة لك . وهذه النقطة هى موضوع  
الأمثلة التالية .

( ١ ) إذا كان قطار يقطع ع من الأميال في الساعة ، فإنه يسير ن ع ميلا في ساعات عددها ن . أوجد جدولا يبين المسافة التي يقطعها القطار في . ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ساعة .

(ب) ماذا يصبح الجدول إذا كانت  $c = 30$  ، أى إذا كان القطار يسير بمعدل 30 ميلا في الساعة ؟

(ح) ماذا يصبح الجدول إذا كانت  $n = 10$  ؟

(و) ما نتيجة التعويض  $n = ٤$  في العبارة  $n - ١$  ؟

(هـ) ما نتيجة تعويض  $n=1$  في  ${}^2n + {}^3n + {}^5n$  ؟

( و ) إذا عوضت عن ن بالأعداد ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠ إلخ على التوالي في القانون ن<sup>٢</sup> + ٤ ن + ٤ ، ما الذي تلاحظه على الإجابات التي تحصل عليها ؟

( ز ) ما نتيجة التعويض عن ن بالأعداد ٠ ، ١ ، ٢ على التوالي في العبارة  $١ن^٢ + ب ن + ح$  ؟

ملاحظة - هذا السؤال الأخير يبدو أنه يزعج الطلبة ، ولكن تلزمنا الإجابة عنه للباب الثامن . قارن هذا السؤال بالسؤال السابق .  
( و ) . بوضع  $ن = ١$  في  $١ن^٢ + ٣ن + ٥$  ينتج ١٠ وذلك لأنه عندما  $ن = ١$  ،  $١ن^٢$  تصبح ١ ، أي ١ وتصبح العبارة  $١ن^٢ + ٣ن + ٥$  ،  $١ن^٢ + ٣ + ٥$  ، أي  $١ + ٣ + ٥$  . وبالتالي فإنه عندما  $ن = ١$  ، تضاعف الأعداد التي تظهر في العبارة ( ٢ ، ٣ ، ٥ ) إلى بعضها . سيحدث ذلك مهما كانت هذه الأعداد إذا وضعت  $ن = ١$  في العبارة ( مثلا ) ١٠  $١ن^٢ + ١٧ن + ٣٥$  ، سنحصل على النتيجة  $١٠ + ١٧ + ٣٥$  التي مجموعها ٦٢ . إذا وضعت  $ن = ١$  في أية عبارة من هذا النوع (  $١ن^٢$  عدد من المرات ،  $ن$  عدد من المرات ، وعدد مجموعين معاً ) نحصل على النتيجة بجمع الثلاثة أعداد التي تظهر في العبارة . وعلى ذلك إذا وضعت  $ن = ١$  في  $١ن^٢ + ب ن + ح$  ستحصل على الجواب  $١ + ب + ح$  .

بنفس الطريقة ستجد أن نتيجة وضع  $ن = ٠$  هي إعطاء العدد الثالث فقط .

فمثلا عندما  $ن = ٠$  . تصبح العبارة (  $٤ن^٢ + ١٧ن + ٤٥$  )  $٤٥ =$

وعندما نعوض  $n = 0$  ، يأخذ المقدار  $1n^2 + 2n + 3$  القيمة  $3$  .

وستجد أيضاً أن نتيجة تعويض  $n = 2$  هي أن يكون لديك ٤ مرات العدد الأول في العبارة + مرتان العدد الثاني في العبارة + العدد الثالث في العبارة .

وبالاختزال النتيجة هي  $4 + 2 + 3 = 9$

أوجد بنفسك ما تحصل عليه عندما تضع  $n = 3$  أو  $n = 4$  أو  $n = 5$  .

إذا وجدت صعوبة كبيرة في هذا الباب فحاول أن تتصل بمهندس وهو سيقول لك ما يفعله عندما يستخدم قانوناً لمسألة عملية . والجزء الأول في الباب الثامن قد يساعدك أيضاً على رؤية كيف يستخدم قانون في الحياة العملية . ولن تقابلنا مسائل شبيهة بالسؤال السادس إلا في نهاية الباب الثامن عند دراسة حساب الفروق المحدودة .

## الباب الثامن

### طرق الإكثار

عندما يؤخذ في الاعتبار الأهمية البالغة لاستخدام الصيغ الرياضية في مجال واسع من المهن ، من السباكة إلى صناعة البوارج الحربية ، فإن تكون هناك مبالغة على الإطلاق إذا قلنا إن سهولة استخدام الصيغ الرياضية ، وتفسيرها وتطبيقها هو أحد الأمور المهمة التي ينبغي على الدراسة المبكرة للرياضة أن تنظر لها كهدف . .

ت . برسي ن - تعليم الجبر

نهتم في كثير من الأحيان بمعرفة السرعة التي ينمو بها شيء .  
إذا كان ارتفاع إحدى ناطحات السحاب ضعف ارتفاع ناطحة سحاب أخرى فلا بد أن يكون هيكلها أقوى بحيث يمكنه احتمال الوزن الزائد . ستتكلف الأولى أكثر من ضعف ما تتكلفه الثانية في بنائها . كم مرة تزيد تكاليف الأولى على الثانية ؟ أربع مرات ؟ ثمانى مرات ؟

كلما تقدم جيش في أرض معادية ازدادت صعوبة إحضار



المؤن والمحافظة على الاتصال . فالنوغل مسافة ١٠٠٠ ميل يحتاج إلى عدد من سيارات النقل أكثر من عشرة أمثال ما يحتاج إليه النوغل مسافة مائة ميل : ولكن كم ؟

إذا كنت تراقب الحرائق من سطح منزل فقد تحتاج لأن تقفز عند الضرورة . هل الخطر في القفز من ارتفاع ٤٠ قدماً ضعف خطر القفز من ارتفاع ٢٠ قدماً ؟ أو أكثر من الضعف ؟ أو أقل من الضعف ؟

إذا كانت إحدى ربات المنازل تشتري خشباً للدفأة ودفعت ستة قروش لحزمة محيطها قدم، فكم تدفع لحزمة محيطها ست بوصات . في جميع هذه الأسئلة نهتم بالطرق المختلفة التي يتكاثربها شيء . وقد يكون الجواب مهماً بالنسبة لأغراض عملية . أى شخص يحاول بناء المساكن بطريقة اقتصادية عليه أن يعرف الإجابة عن السؤال الأول : وإلا فقد يجد أن ما يوفره في شراء الأرض يتفق بأكمله في التكاليف الزائدة لمواد البناء .

وأيضاً ، كثير من الناس الذين كان من المحتمل أن يكونوا مكتشفين خاب أملهم نتيجة لجهلهم بتأثيرات التغير في المقياس . اكتشف كثير من الناس في الماضي محركات للطيران وصنعوا بنجاح نماذج صغيرة طارت طيراناً جيداً . ثم عملوا على تكبير

النموذج وبنوا طائرة بحجم كبير ، ولكنها لم تطر على الإطلاق -  
السبب هو أن وزن الآلة والقوة الرافعة يتغيران بطريقتين  
مختلفتين تماماً . إذا تمكن إنسان من تصميم برغوث مكبر بحجم  
الفيل فإن حركاته ستكون مختلفة تمام الاختلاف عن حركات  
برغوث حقيقي ، كما يمكنك أن تتخيل .

وعلى ذلك فهو أمر طبيعي أن يتوقع المهندسون والعلماء من  
الرياضيين أن يمدوهم بطريقة بسيطة لكتابة الأسلوب الذى تنمو  
به أية كمية .

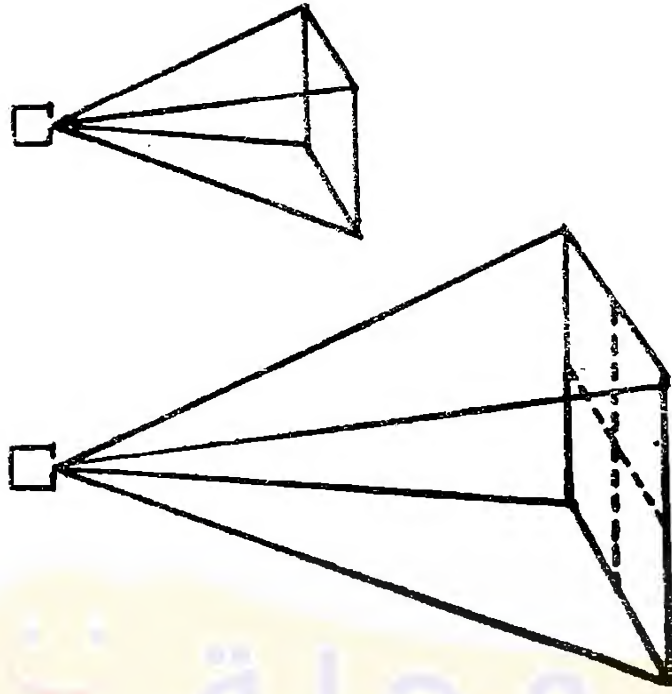
وبالطبع ، تنمو الأشياء بطرق كثيرة مختلفة ، إذا اعتبرنا مثلاً  
تعداد سكان مدينة ما نشستر فى المائة والخمسين عاماً الماضية فهذه  
كمية تغيرت بطريقة معقدة للغاية . يمكن لرياضي أن يدرسها  
وأن يصفها ، ولكن يجب ألا تنتظر أن يكون الوصف مختصراً  
جداً وبسيطاً . سيدخل فى الوصف كثير من الأشياء ، الثورة  
الصناعية ، التقلبات فى تجارة القطن ، هجرة الأطفال فى وقت  
الحرب ، وهكذا . ومن ناحية أخرى ، تتغير بعض الأشياء بطريقة  
بسيطة جداً سنعطى أمثلة فيما بعد . وبين هذين الحدين المتطرفين  
يوجد عدد كبير من أنواع النمو التى يمكن دراستها وكتابتها  
بدرجات متفاوتة الصعوبة . يجب ألا تتوقع من الرياضة أن تجعل  
من مسألة معقدة مسألة بسيطة قد تساعدنا الرياضة على

اكتشاف الاسباب الجذرية للأشياء ، ولكن إذا كانت الاسباب كثيرة ومتداخلة فإن الوصف الرياضي لن يكون بسيطاً هو الآخر . وسندرس هنا فقط بعض الحالات البسيطة فلا تقع في خطأ الفرض بأن كل مسألة مهما كانت معقدة يمكن ضغطها إلى هذه الصور البسيطة .

### أبسط صورة للعمور

سعر أية سلعة تشتري بالياردة هو مثال على علاقة بسيطة . إذا كان سعر الياردة من شريط هو قرشان فإن ثمن ياردتين أربعة قروش ، وثمان ياردات عددها س هو ٢ س قرشا . إذا كانت ث تمثل ثمن س من الياردات بالقروش فإن  $ث = ٢ س$  .

يمكن جعل هذا القانون عاما بدرجة أكبر . ليس من الضروري أن يكون سعر الياردة من الشريط قرشين . افرض أن سعر الياردة هو ١ من القروش حيث من الممكن أن يكون ١ أى عدد . على ذلك يعطى ثمن ياردات عددها س بالعلاقة :  $ث = ١ س$  . نحن نفترض أن ثمن كل ياردة لا يتوقف على عدد الياردات المشتراة : لن يوجد تخفيض في السعر تبعا للكمية . ننص على ذلك بلغة الرياضة بأن نقول أن ١ ثابت . مثل هذه العلاقات



### حيز ستارة السينما

في الشكل السفلي الستارة تبعد عن مصدر الضوء ضعف ما تبعد عنه الستارة في الشكل العلوي . عرض الستارة السفلي ضعف عرض العليا وكذلك طولها ضعف طول العليا . الخطان المتقطعان يبينان أن الستارة السفلي يمكن أن تقسم إلى أربع ستائر كل منها بحيز الستارة العليا

مألوف فمثلا يرتبط محيط  $m$  وقطر دائرة (ق) . بالعلاقة  $m = 3.14 \times c$  ، أيضاً في الميزان الزنبركي يمتد الزنبرك مسافة تناسب مع الوزن المعلق فيه إذا كان الرطل الواحد يسبب استطالة لـ بوصة ،

فإن أرتال عددها س ستسبب استطالة قدرها س لـ بوصة .  
اكتشف هوك هذه الحقيقة حوالى سنة ١٦٦٠ . درس هوك  
خصائص الزنبرك نتيجة لعمله فى صناعة الساعات . وكان اختراعه  
لعجلة الميزان التى يستبدل فيها ببندول الساعة زنبركا شعريا ، كان هذا  
الاختراع نتيجة عملية لدراساته . وقانون هوك لا يكون صحيحا  
إلا للأوزان الصغيرة نسبيا . الوزن الثقيل سيجعل الزنبرك  
يستطيل استطالة كبيرة : عند رفع الوزن لـ يعود الزنبرك لطوله  
الأصلى .

ستجد فى جميع فروع الرياضيات والعلم والهندسة قوانين من  
النوع ١ س .

### قوى س

يقابلنا نوع آخر من النمو عندما يزاح جهاز إسقاط سينمائى  
أو فانوس سحرى ، بعيداً عن الستارة فإن الصورة ستشغل حيزاً  
يساوى أربعة أمثال لا ضعف الحيز الأول . إذا جعلت البعد  
ثلاثة أمثال البعد الأول فإن الحيز سيصبح تسعة أمثاله .

القاعدة واضحة : ٤ هى  $2 \times 2$  أو  $2^2$  ٦ هى  $3 \times 3$  أو  $3^2$  .  
إذا وضعنا الفانوس على بعد يساوى ن من المرات البعد الأول فإن  
مساحة الصورة تصبح ن<sup>٢</sup> من المرات قدر المساحة الأولى .



بنفس الطريقة إذا كبرنا صورة أو خريطة ن من المرات فإنه يلزمنا ورقا . مساحته ن<sup>2</sup> من المرات مساحة الصورة أو الخريطة قبل التكبير .

وعلى ذلك لدينا الآن الإجابة عن السؤال الخاص بخشب المدفأة . الحزمة المربوطة بحبل طوله ١٢ بوصة تحتوى على أربعة أمثال ما تحتويه الحزمة المربوطة بحبل طوله ست بوصات يمكنك أن ترى أن الحزمة الكبرى يجب أن تحتوى على أكثر من ضعف المقدار الذى تحتويه الحزمة الصغرى وذلك بالنظر إلى شكل ه . الجزء المظلل يمثل حزمتين صغيرتين : الدائرة الكبيرة تمثل حزمة كبيرة واحدة .



( شكل ه )

إذا ألقى حجر من أعلى برج ، ستجد أنه يسقط حوالى ١٦ قدماً فى الثانية الأولى و٦٤ قدماً فى الثانية الأولى والثانية، ١٤٤ قدماً فى الثوانى الثلاثة الأولى .

يمكن التعبير عن هذه النتائج بواسطة القانون الذى ينص على أنه فى س من الثوانى يسقط الحجر حوالى ١٦ س<sup>٢</sup> قدماً . وعلى ذلك ففيه ثوانٍ سيدسقط الحجر ١٦ من المرات  $25 = 400$  قدم . إذا أمكنك أن تتذكر هذا القانون وكان معك ساعة فن السهل معرفة ارتفاع برج أو عمق بئر بإسقاط حجر وملاحظة عدد الثوانى التى يستغرقها للوصول إلى القاع .

ويعطى قانون آخر السرعة التى يصل بها الحجر إلى القاع . هذا القانون هو  $v = 64L$  . فى هذا القانون ل هو ارتفاع البرج با لقدم ، ع هى السرعة بالقدم فى الثانية التى يصل بها الحجر إلى نهاية مرحلته ، وإذا كان إرتفاع البرج هو ١٠٠ قدم فإن ل يساوى ١٠٠ وبالتالى فإن  $v = 6400$  ع . للحصول على ضعف هذه السرعة يجب أن يكون إرتفاع البرج أربعة أمثال إرتفاعه فى هذا المثال . ( وهذا يعطى الإجابة عن السؤال الخاص بمراقبة الحرائق ) . من السهل تحويل سرعة ٣ أقدام فى الثانية إلى أميال فى الساعة وستجد أنها تساوى تقريباً ميلين فى الساعة . أى أن ٨٠

قدماً في الثانية هي حوالى ٥٣ ميلا في الساعة : القفز من سطح منزل ارتفاع ١٠ أقدام يعادل في خطره خطر التصادم مع سيارة تسير ٥٣ ميلا في الساعة .

يمكننا بنفس الطريقة أن نناقش طريقة النمو التي يمثلها س<sup>٢</sup> ستحتاج إلى ثمانية مكعبات من السكر لعمل مكعب واحد أبعاده ضعف أبعاد المكعب العادى . ولعمل مكعب أبعاده تساوى س من المرات الأبعاد العادية يلزمك س<sup>٢</sup> من المكعبات العادية . إذا كبرت أى جسم س من المرات ، ليس من الضروري أن يكون مكعباً ، فإنك تضرب المادة التي تحتويها في س<sup>٢</sup> : فمثلا إذا ضاعفت جميع أبعاد درج ، أو صندوق ، أو حقيبة ، فإنك تضرب الحيز الذي يمكنك ملأه في ٨

عند تكبير نموذج لآى جسم ، قد تتضمن العملية جميع هذه الأنواع المختلفة للنمو . افرض للبساطة ، أن لدينا صندوقا على هيئة مكعب ، مصنوع من الورق المقوى . إذا كان طول ضلع المربع هو قدما واحدا فإن سعة الصندوق ستكون قدماً مكعبه واحدة وستكفى ست أقدام مربعة من الورق المقوى لعمله ، ويمكن إحاطته بحبل طوله أربع أقدام . إذا صنعنا بدلا من هذا الصندوق ، صندوقا آخر مكعب الشكل طول ضلعه ٢ قدم سنجد

أن سعته تساوى ثمانية أمثال سعة الصندوق الأول ، وأنه يلزم  
قسط لصنعه أربعة أمثال الورق المقوى اللازم لصنع الصندوق  
الأول ، ولربط حبل طوله يساوى ضعف طول الحبل اللازم  
لربط الصندوق الأول . . . وضع البضائع فى صناديق كبيرة  
أرخص من وضعها فى صناديق صغيرة بشرط ألا ينفجر الورق  
المقوى .

من السهل أن نرى لماذا كانت نتائج مخترعى الطائرات الأولى  
مخيبة للرجاء عندما حاولوا تكبير مقاييس نماذجهم . إذا ضوعفت  
الأبعاد فإن الوزن يضرب فى ٨ ولكن الأجنحة تضرب فى ٤  
فقط .

تظهر س ، س<sup>٢</sup> ، س<sup>٣</sup> بطريقة طبيعية عندما نعتبر التغييرات  
فى المقاييس للنماذج وفى تطبيقات أخرى ، تستخدم س<sup>٤</sup> ، س<sup>٥</sup>  
س<sup>٦</sup> ، وهكذا .

فمثلا الحدافة ، هى جهاز مألوف لتخزين الطاقة . افرض أننا  
صنعنا حدافتين بقطع قطع دائرية من صفيحة معدنية — قطر  
إحدى الدائرتين ضعف قطر الأخرى . افرض أن كلا من  
الحدافتين تدور بنفس المعدل — دورة واحدة فى الثانية مثلا .  
هل سيكون للحدافة الكبرى ضعف ، أو أربعة أمثال أو ثمانية  
أمثال طاقة الحدافة الصغرى ؟ لا .. تبين التجربة أن طاقة الحدافة

الكبرى هي ١٦ مرة طاقة الحدافة الصغرى ٤ ، أى ٢ من طاقة الحدافة الصغرى . إذا كبرنا نصف القطر س من المرات فإننا تزيد الطاقة س٤ من المرات . يمكن جعل محركات الطائرة تبدأ فى معمل بواسطة حدافة . تصنع الحدافة بحيث تدار باليد، ثم توصل فجأة بمحرك الطائرة . إذا كنت تستعمل الحدافة الكبرى التى ذكرناها فيما سبق، سيكون تحت تصرفك طاقة قدرها ١٦ مرة من الطاقة التى تحت تصرف رجل يستخدم الحدافة الصغرى ، وحيث إن الزمن الذى يلزمك لدوران حدافتك يساوى ١٦ مرة الزمن اللازم للرجل الآخر فسنحصل على صورة حية لمعنى ٤ ٢ .

إذا أنت ضاعفت قطر الحدافة وأيضاً سمك المعدن ، فإنك تضرب الطاقة فى ٢ أو ٣٢ . فى هذه الحالة الحدافة الكبرى هى ضعف الصغرى فى جميع الاتجاهات . تأثير تكبير حدافة س من المرات فى جمع الاتجاهات هو زيادة طاقتها ( بسرعة معينة أو دوران معين ) س٥ من المرات .

تسمى س ، س٢ ، س٣ ، س٤ ، س٥ القوى الأولى والثانية والثالثة والرابعة والخامسة لعدد س بدلا من ٢ ، ٣ ، ٤ أو ٥ يمكن أن نأخذ أى عدد آخر . باستعمال ن كاختصار ولأى عدد، يمكننا أن نقول إن س ن هى القوة النونية للعدد س .

وقد تظهر قوى س مع بعضها البعض ومع ثوابت . فمثلا قد



يطلب نادى للتنس ٥ شلن كرسوم دخول ، وشلنا واحدا عن كل يوم يلعب فيه العضو فعلا خلال الموسم. وعلى ذلك فإن تكاليف لعب يوم واحد سيكون ٦ شلن وتكاليف لعب يومين ٧ شلن ، وتكاليف اللعب س من الأيام ( ٥ + س ) شلن .

أيضا ، إذا قذفت كرة رأسيا إلى أعلى بسرعة ٥ قدماً فى الثانية فإن ارتفاعها بعد مرور س من الثواني يعطى بالعلاقة ١٠س - س<sup>٢</sup> قدما . ( استخدمنا أرباع الثواني بدلا من الثواني بغرض تبسيط الأعداد ، ولأن الكرة تظل زمنا طويلا فى الهواء ) يمكننا عمل جدول كما يلى :

عدد أرباع الثواني ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠  
الارتفاع بالقدم ٠ ٩ ١٦ ٢١ ٢٤ ٢٥ ٢٤ ٢١ ١٦ ٩ ٠  
انخص مجموعة الأعداد الموجودة فى الصف السفلى من هذا الجدول . ستلاحظ أن نفس الأعداد تظهر من اليمين ومن اليسار هل تلاحظ أى شئ آخر بالنسبة لها ؟

أكتب التغير بين كل عدد والعدد التالى :

الأعداد ٠ ٩ ١٦ ٢١ ٢٤ ٢٥ ٢٤ ٢١ ١٦ ٩ ٠  
التغير ٩ - ٧ - ٥ - ٣ - ١ - ١ ٣ ٥ ٧ ٩  
توجد قاعدة بسيطة جداً يمكن ملاحظتها بالنسبة لهذه المجموعة

من الأعداد : كل عدد يقل بمقدار ٢ عن العدد السابق له . ويرجع ذلك إلى الجذب العكسي المنتظم الذي تؤثر به الجاذبية الأرضية على الكرة . في فترات الربع ثمانية الأولى ترتفع الكرة ٩ أقدام ولكن سرعتها تتناقص باستمرار خلال هذا الوقت . في الفترة الثانية ، تقطع الكرة ٨ أقدام فقط ، وفي الثالثة ٥ أقدام وهكذا . في الفترة الخامسة ترتفع الكرة إلى قدم واحد ، ( كما هو المعتاد + ١ يعنى قدما واحدة إلى أعلى ، - ١ يعنى قدما واحدة إلى أسفل ) . والآن نسقط الكرة بسرعة متزايدة ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ أقدام في فترات متتالية :

يمكننا أن نستمر في كتابة مثل هذه الصفوف من الأعداد في كل صف يعطى التغيرات في الصف الذي أعلاه . بهذه الطريقة نحصل على الجدول الآتي :

#### جدول ١

٠	٩	١٦	٢١	٢٤	٢٥	٢٤	٢١	١٦	٩	٠
٩	٧	٥	٣	١	١	٣	٥	٧	٩	
	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	
		٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	
			٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	

جميع الأعداد في الصف الثالث هي - ٢ . لا يوجد تغير

عند الانتقال من عدد لآخر وبالتالي فإن جميع الأعداد في الصف الرابع هي أصفار . يمكن أن تستمر في هذه العملية إلى أى مدى ترغب فيه : كل ما ستحصل عليه هو عدد آخر من الأصفار في الصف الخامس والسادس والصفوف التالية .

فلنجرب هذه العملية على بعض العبارات الأخرى التى قابلتنا من قبل . إذا كتبنا الأعداد التى تناظر س<sup>٢</sup> نحصل على :

### جدول ٢

٨١	٦٤	٤٩	٣٦	٢٥	١٦	٩	٤	١
١٧	١٥	١٣	١١	٩	٧	٥	٣	١
٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢
.	.	.	.	.	.	.	.	.

إذا حاولنا س<sup>٢</sup> نجد :

### جدول ٣

٥١٢	٢٤٣	٢١٦	١٢٥	٦٤	٢٧	٨	١
١٦٩	١٢٧	٩١	٦١	٣٧	١٩	٧	١
٤٢	٣٦	٣٠	٢٤	١٨	١٢	٦	
٦	٦	٦	٦	٦	٦	٦	
.	.	.	.	.	.	.	.

حاول أنت حالتى سر٤ ، س٥ كون عبارات مثل :  
س٢+٣ ، س٢+٥ س٧+٧ وحاول نفس الشئ بالنسبة لها . ستجد  
دائماً أنك بعد عدد معين من الصفوف ستحصل على أصفار .  
ما هى القاعدة التى تعطى عدد الصفوف التى تظهر قبل الوصول  
إلى الأصفار؟ جواب هذا السؤال معطى فيما بعد . ولكن حاول  
أن تصل إليه أنت . أجز العملية بالنسبة لعدد كبير من الأمثلة :  
قسم الأمثلة إلى مجموعات ، الأمثلة التى لها صف واحد ثم أصفار  
معا ، والتى لها صفان معا وهكذا . القاعدة هى فى الواقع قاعدة  
بسيطة .

### الدوال الرئيسية

لقد رأينا أن أى عبارة مكونة من قوى س ستؤدى عند  
مرحلة معينة إلى صفوف من الأصفار وذلك عند إجراء العملية  
السابق شرحها .

هذه الصفة غير موجودة فى جميع طرق النمو : فى الواقع  
العبارات الوحيدة التى تتصف بهذه الصفة هى تلك التى تتكون  
من قوى س .

إذا حاولت إحدى القواعد الأخرى ، ستتحقق بسرعة من

صححة هذا الكلام . خذ مثلاً مجموعة الأعداد : ١ ، ٢ ، ٤ ،  
 ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، ١٢٨ ، ٠٠٠ إلخ حيث كل عدد هو  
 ضعف سابقه . هذه المجموعة تناظر الصيغة ٢ س (تذكر أننا نبدأ  
 بالقيمة س = ٠ ، إذا كان مبلغاً من المال يضاعف نفسه كل  
 سنة ، وهى نسبة ربح عالية ، فإن ١ جنيه يصبح ٢ جنيه بعد  
 عام ، ٤ جنيه بعد عامين ، ٠٠٠ إلخ . وبعد س من الأعوام يصبح  
 ٢ س .) إذا عملنا جدولاً لهذه المجموعة من الأعداد ، وذلك  
 باستخدام نفس الطريقة السابقة ، نحصل على :

١	٢	٤	٨	١٦	٣٢	٦٤	١٢٨
١	٢	٤	٨	١٦	٣٢	٦٤	٠٠٠٠
١	٢	٤	٨	١٦	٣٢	٠٠٠٠	

كل صف يطابق الصف الذى يسبقه تماماً ١ وهما استمر  
 الإنسان فى هذه العملية فلن يقابله صف جميعه أصفار أبداً .

حاول ٣ . هذه الصيغة تعطينا الجدول :

١	٣	٩	٢٧	٨١	٢٤٣	٠٠٠٠
٢	٦	١٨	٥٤	١٦٢	٠٠٠٠	
٤	١٢	٣٦	١٠٨	٠٠٠٠		

فى هذه الحالة كل صف هو ضعف الصف الذى يسبقه



ومهما استمرت في العمل فإن يقابلك صف كله أصفار .

تسمى  $s_2$  ،  $s_3$  دوال أسية . إذا استخدمنا  $s_1$  كاختزال  
للدلالة على «أى عدد» ،  $s_1$  هي دوال أسية .

### مساب الفروق المحدودة (الاستكمال)

نرغب في كثير من الأحيان في معرفة القاعدة التي تتكون بها  
مجموعة معينة من الأرقام . قد يجد مهندس ، بالتجربة ، الضغط  
اللازم لكي تنفجر المراجل المصنوعة من ألواح معدنية يختلف  
سمكها . إذا تمكن من التعبير عن نتائجه على صورة قاعدة بسيطة  
فإن ذلك يكون مفيداً لغيره من المهندسين . قد يقيس عالم ارتفاع  
نبات يومياً ويحاول أن يجد القاعدة التي ينمو بها النبات .

يختص جزء كبير من العلم بمحاولة إيجاد القواعد بدراسة  
نتائج التجارب .

عندما تعتمد كمية على أخرى ، يقال إنها دالة للكمية الثانية .  
فمثلاً الضغط الذي عنده ينفجر المراجل يتوقف على سمك جوانبه .  
إذا سمينا الضغط  $s$  والسمك  $s_1$  ، نقول إن  $s$  دالة في  $s_1$  ،  
ويمكن كتابة الضغط اللازم لانفجار جوانب سمكها  $s_1$  على

الصورة ض (س) . وعلى ذلك فإن ض (٢) سيغنى الضغط  
اللازم لانفجار مرجل مصنوع من معدن سمكه ٢ بوصة ،  
ض (٢) الضغط اللازم لانفجار مرجل سمك جوانبه  $\frac{2}{8}$  بوصة .  
وطبعاً ، نحن نفترض أن تصميم المرجل هو نفسه في كل حالة  
وأن نفس المعدن يستخدم في جميع التجارب .

بنفس الطريقة ، إذا رمزنا إلى د عدد الأيام ، بالرمز س وإلى  
ارتفاع النبات بالبوصات بالرمز ص ، فإن ص دالة في س ،  
ص (١٧) ستعني ارتفاع النبات بعد ١٧ يوماً : ص (س) هو  
الارتفاع بعد أيام عددها س .

إذا قلنا د ماهي الدالة بين س ، ص ، فنحن نعني بأية قاعدة  
خاصة تربط ص مع س ، ؟ .

يستخدم هذا السؤال في اختبارات الذكاء . تعطى للطفل  
الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ثم يسأل د ما العدد التالي ؟  
طبعاً هو ٦ . وقد يعطى طفل أكبر سناً الأعداد ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ،  
وينتظر منه أن يعرف أن العدد التالي هو ١٠ .

مثل هذه الحالات البسيطة يمكن الإجابة عنها بدون أية طريقة  
خاصة . ولكن افرض أن الجدول التالي أعطى لك .

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ص	١	٣	٨	١٣	٢١	٣١	٤٣	٥٧	٧٣	٩١	١١١

كيف نجد العدد ص الموجود في الصف الثاني المناظر لـ ١  
عدد س في الصف الأول ؟ قد يغفر لطفل إذا هو أعطى الأعداد  
١ ٣ ٧ ٢١ ٣١ ولم يستطيع معرفة أن العدد التالي هو ٤٣ ،  
ولكن طريقة كتابة التغير بين كل عدد والتالي له تعطينا دليلاً  
للإجابة بسرعة سيكون لدينا الجدول .

#### جدول ٤

١	٣	٧	١٣	٢١	٣١	٤٣	٥٧	٧٣	٩١	١١١
٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨	٢٠	
٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	

لدينا أصفار في الصف الأخير : لا بد أن تكون الصيغة بسيطة  
ولا تحتوي إلا على قوى س .

ولكن كم قوى من قوى س سنحتاج إليها ؟ هل سنضطر  
لإدخال س<sup>٥</sup> كما كان ذلك ضرورياً في حالة الحدافة ؟ أم ان يكون  
من الضروري الذهاب إلى هذا الحد ؟

ربما تكون قد اكتشفت الإجابة عن السؤال الذي أعطيناه فيما  
قبل . إذا كنت لم تستطع ، فالإجابة هي ما يلي . أى عبارة مثل  
٢ س + ٣ ، لا تحتوي على قوى س أعلى من س ، تعطينا  
صفيين من الأعداد ، ثم أصفاراً بعد ذلك . إذا أدخلت س<sup>٢</sup> - كما  
في س<sup>٢</sup> + ٣ س - ٢ ، مثلاً سيكون لدينا ثلاثة صفوف ثم

أصفار ٠ إذا ظهرت س<sup>٢</sup> في العبارة ، سنحصل على أربعة صفوف ثم أصفار ، وهكذا إذا احتوت العبارة على س ن سيكون لدينا صفوف عددها ( ن + ١ ) قبل أن تظهر الأصفار . والسير بطريقة عكسية في هذه العملية صحيح أيضاً إذا كانت لدينا أربعة صفوف قبل ظهور الأصفار فمن الممكن إيجاد صيغة لا تحتوي على قوة أعلى من س<sup>٢</sup> . إذا كان لدينا صفوف عددها ( ن + ١ ) فإن الصيغة ستحتوي على قوى س حتى س ن .

سيساعدنا ذلك على إيجاد الصيغة التي تعطينا الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، إلخ هذه الأعداد تؤدي ، كما رأينا حالا ، إلى جدول يحتوي على ثلاثة صفوف فقط . لا يمكن أن تحتوي الصيغة على أية قوة من قوى س أعلى من س<sup>٢</sup> . يكفي أن نأخذ س<sup>٢</sup> عدداً معيناً من المرات ، س عدداً معيناً من المرات ، ونضيف إليها عدداً ما . ستأخذ الصيغة صورة  $س^٢ + ب س + ح$  بطريقة الاختزال الجبري ، حيث ١ هو عدد المرات س<sup>٢</sup> ، وعدد مرات س ، ح يدل على العدد المضاف . ( وعلى ذلك ففي الصيغة :  $س^٥ + س^٣ - ٢$  ، ١ هو ه ، ب هو ٣ ، ح هو - ٢ ) . لا نعلم حتى الآن القيم التي يجب أن تأخذها ١ ، ب ، ح . كل مانعله هو إمكان الحصول على الصيغة الصحيحة باختيار القيم المناسبة لكل من ١ ، ب ، ح . وهذه بالطبع مساعدة كبيرة لنا . عندما

بدأنا النظر في المسألة كان علينا أن نتوقع أية صيغة : قد تكون هذه الصيغة  $s + s^2$  أو  $s^3$  أو عبارات أسوأ من ذلك .

بمجرد أن نعرف أن الصيغة هي من النوع  $s^2 + s + c$  يصبح من السهل للغاية معرفة قيم  $a, b, c$  . نحن نعلم أن الأعداد  $1, 3, 7, 13, 20, \dots$  تلتيج إذا نحن غيرنا  $s$  في الصيغة الصحيحة بالأعداد  $0, 1, 2, 3, \dots$  إلخ على التوالي . إذا غيرنا  $s$  في الصيغة  $s^2 + s + c$  بالعدد صفر نحصل على  $c$  . وإذا غيرنا  $s$  بالعدد  $1$  نحصل على  $1 + c$  . وإذا غيرنا  $s$  بالعدد  $2$  نحصل على  $4 + 2 + c$  . (إذا شئت يمكنك تغيير هذه النتائج كلاماً وذلك بقراءة  $1 + 4$  أربع مرات العدد الذي يأتي مع  $s^2$  في الصيغة ، وهكذا ) .

يمكننا الآن مقارنة هاتين المجموعتين من النتائج إذا كانت  $c$  تعطى بالصيغة  $s^2 + s + c$  ، فإن  $c = 0$  . ولكن  $c = 0$  ، أي قيمة  $c$  التي تناظر  $s = 0$  هي  $1$  . لا بد أن يكون  $c = 1$  . كما نحصل من الصيغة على  $c = 1$  .  $1 + c = 2$  . ولكن  $c = 1$  ، وعلى ذلك فيجب اختيار  $a, b, c$  بحيث يكون  $1 + c + s = 2$  . بنفس الطريقة ، بمقارنة صيغة ( 2 ) بما يجب أن تعطيه ، نحصل على المعادلة :  $4 + 2 + c = 7$  . لدينا الآن ثلاث معادلات .



$$1 = ح$$

$$2 = ح + ب + ١$$

$$٧ = ح + ب٢ + ١٤$$

هذه المسألة مماثلة تماماً لمسألة الكعك والشطائر وفنجان القهوة ، ويمكن حلها بسهولة باستخدام الطريقة المشروحة في الباب السابع ، وتؤدي إلى النتيجة  $١ = ب$  ،  $١ = ح$  ، وبالتالي نحصل على الصيغة  $ص = س٢ + س + ١$  . هذه هي القاعدة التي وجدت على أساسها أعداد الجدول .

في الموضوع المعروف باسم حساب الفروق المحدودة ، أو حساب الاستكمال ، طورت الطريقة التي أعطيناها فيما سبق وبرهن على صحتها .

وقد وجد من المناسب إدخال بعض الاختصارات . كان علينا أن نشير باستمرار إلى « الصف الثاني في الجدول » ، « الصف الثالث » ، وهكذا . لتجنب ذلك استخدمت علامات معينة كأسماء لهذه الصفوف . الصف الأول ( الذي كان يحتوى في المثال الأخير على الأعداد ١ ، ٣ ، ٧ ، ١٣ ، ٠٠٠ ) سميناه ص فعلا . الصف الثاني ( الأعداد ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٠٠٠ ) في ذلك المثال ( يسمى  $\Delta$  ص . العلامة  $\Delta$  هي اختصار الجملة

« التغير في ، . وحيث إن كل صف يمثل التغيرات التي تحدث في الصف السابق له ، فإننا نضيف علامة أخرى  $\Delta$  كلما انتقلنا إلى صف آخر . فمثلا الصف الثالث يمثل التغيرات في  $\Delta$  ص ، ويمكن كتابته  $\Delta \Delta$  ص . لاحظ أن  $\Delta$  لا ترمز لعدد ما كما هو الحال مع ١ ، ٢ والحروف الأخرى .  $\Delta$  ترمز « للتغير في ، — وليس إلى أى شيء آخر . ويمكن تغيير هذه العلامة بهذه الكلمات دائماً . وعادة تختصر  $\Delta \Delta$  ص مرة أخرى إلى  $\Delta^2$  ص . وهذا الاختصار يكون مناسباً على الخصوص عندما يتضمن العمل عدداً كبيراً من العلامات  $\Delta$  . فمثلا  $\Delta^0$  ص هي أنسب بكثير من  $\Delta \Delta \Delta \Delta \Delta$  ص كاختصار للأعداد الموجودة في الصف السادس .

وفي بعض الأحيان نرغب في الإشارة باختصار إلى عدد خاص في أحد الصفوف . لقد استخدمنا فعلا العلامة ص (س) لوصف العدد الموجود في الصف الأول والذي يناظر القيمة س وعلى ذلك فالأعداد الموجودة في الصف الأول هي ص (٠) ، ص (١) ، ص (٢) ، ص (٣) وهكذا نستخدم علامات مشابهة للأعداد الموجودة في الصفوف التالية . الأعداد في الصف الثاني تسمى  $\Delta$  ص (٠) ،  $\Delta$  ص (١) ،  $\Delta$  ص (٢) وهكذا ، والتي في الصف الثالث  $\Delta^2$  ص (٠) ،  $\Delta^2$  ص (١) ،

$\Delta^2$  ص (٢) إلخ وهكذا بالنسبة إلى أى صف .  
ستجد هذه العلامات فى أى كتاب على حساب الفروق  
المحدودة . وهى تبدو غريبة لأول وهلة ، ولكن بمجرد أن  
تعود عليها ، وتتحقق من أن  $\Delta^2$  ص (١) لا تغنى أى شىء  
مخيف أكثر من « العدد الثانى فى الصف الثالث ، فى جدول مثل  
جدول ٣ أو جدول ٤ ، ستجد أن الموضوع موضوع جيد  
للمجادلة فيه . يمكنك أن تحاول المسائل الآتية :

١ — مرت سيارة بأحد أعمدة الإضاءة . وبعد ثانية واحدة  
كانت تبعد عن العمود مسافة ٣ ياردة ، وبعد ثانيتين ١٠ ياردة ،  
وبعد ثلاثة ثوان ٢١ ياردة ، وبعد أربعة ثوان ٣٦ ياردة . ما بعد  
السيارة عن العمود بعد  $\frac{1}{4}$  ثانية ، وبعد  $1\frac{1}{4}$  ثانية ، وبعد  $2\frac{1}{4}$   
ثانية ؟ هل تزداد سرعة السيارة أم هى آخذة فى الإبطاء ؟

٢ — ما هو العدد الناقص فى المجموعة الآتية ؟

٣ ، ٤ ، ٠٠٠ ، ٢٤ ، ٤٣ ، ٦٨

إذا نجحت فى الحصول على العدد الصحيح ، فإن جدول  
 $\Delta$  ص ،  $\Delta^2$  ص إلخ سيوضح تماماً صحة جوابك . إن يكون  
لديك أى شك ما دمت اخترت العدد الصحيح . ويجب أن يكون  
هذا العدد أحد الأعداد بين ٥ ، ٢٣ . يمكنك أن تحاول جميع  
هذه الأعداد إذا لم يكن هناك بد من ذلك .

## معاملات مفكوك ذى الحدين

من الممكن عمل جدول مشابه لجدول  $\epsilon$  إذا فرضنا أن الصف الأول، ص، يحتوى على أى مجموعة من الأعداد. فى الواقع يمكننا تمثيل الأعداد الموجودة فى الصف الأول برموز جبرية. افرض أن ١ يمثل العدد الأول ( مهما كان هذا العدد )، ب العدد الثانى، ح العدد الثالث، و العدد الرابع وهكذا. الصف ص يأخذ الآن الصورة.

١ ، ب ، ح ، و ، هـ ، و ، ...

كيف يكون الصف الثانى  $\Delta$  ص ؟ العدد الاول فى هذا الصف يبين التغير بين ١، ب. نحصل على ذلك بطرح ١ من ب ويمكن بالتالى كتابته ب - ١. بنفس الطريقة يمكن كتابة العدد الثانى ح - ب. ( اختبر بنفسك صحة هذا الكلام. فى جدول  $\epsilon$  ما هى الأعداد ١، ب، ح ؟ هل حقيقة يبدأ الصف  $\Delta$  ص بأعداد تساوى ب - ١، ح - ب ؟ ) الصف الثانى فى الحقيقة هو ب - ١، ح - ب، و - ح، هـ - و، و - هـ، ... الخ. يمكن الحصول على الصف الثالث من الصف الثانى. العدد الاول فيه هو ( ح - ب ) - ( ب - ١ ) أو ح - ٢ ب + ١

كما يبين الجبر البسيط . العدد الثاني في هذا الصف هو  
 $s - 2 + b$  .

بالاستمرار بهذه الطريقة ، نحصل على العبارات الموجودة  
 في جدول هـ

جدول هـ

ا	ب	ح	د	هـ
$b - 1$	$c - b$	$d - c$	$e - d$	
$(c - 2 + b)$	$(d - 2 + c)$	$(e - 2 + d)$		
$(d - 3 + c)$	$(e - 3 + d)$			
$e - 4 + d$				

ستلاحظ أشياء معينة خاصة بهذا الجدول . تظهر مجموعة  
 خاصة من الأعداد في كل صف . في الصف  $\Delta^1$  ص ، مثلا ،  
 نجد الأعداد ١ ، ٤ ، ٦ ، ٤ ، ١ . في الصف  $\Delta^2$  ص نجد الأعداد  
 ١ ، ٣ ، ٣ ، ١ . في الصف  $\Delta^3$  ص نجد ١ ، ٢ ، ١ ، وفي الصف  
 $\Delta^4$  ص نجد العددين ١ ، ١ فقط . ( لم نهم بإشارة هذه الأعداد  
 سواء كانت إشارة + أم إشارة - ) . ستلاحظ أن هذه الأعداد  
 هي نفسها سواء قرئت من اليمين أو من اليسار . فمثلا ١ ، ٣ ، ٣ ، ١  
 هي نفسها سواء قرئت من اليمين أو من اليسار . ستلاحظ أن كلا



من العددين الأول والآخر في جميع المجموعات هي العدد ١ .  
 ما الذى تلاحظه بالاضافة إلى ذلك ؟ ما هي القاعدة التى تعطى  
 العدد التالى للعدد الأول ؟ ( أو العدد قبل الأخير ) . هل يمكنك  
 إيجاد الصيغة الخاصة بالعدد التالى لهذا العدد ؟ ( سيلزمك أن  
 تستمر فى عمل عدة صفوف أخرى فى جدول هـ لىكى تتمكن  
 من القيام بذلك ) . طبق الطريقة التى شرحناها فيما سبق لإيجاد  
 الصيغة الخاصة بمجموعة من الأعداد .

تسمى هذه الأعداد بمعاملات مفكوك ذى الحدين . وقد  
 تعرف الرياضيين على هذه الأعداد بنفس الطريقة التى تعرفت  
 أنت بها عليها ، بملاحظة أنها ظهرت خلال العمل فمثلا تظهر  
 هذه الأعداد عند إيجاد قيمة  $2^{11}$  ،  $3^{11}$  ،  $4^{11}$  . التى هى فى الواقع  
 $121$  ،  $1331$  ،  $14641$  . ( بعد هذه المرحلة يدخل النقل بعد  
 العشرة فى الحساب ولن يوجد الارتباط البسيط . الأعداد فى  
 $\Delta^0$  ص هى ١ ، ٥ ، ١٠ ، ١٠ ، ٥ ، ١ وطبعا العدد ١٠ لا يمكن  
 أن يظهر كرقم واحد فى  $11^0$  . والواقع أن  $11^0$  هو ١٦١٠٥١  
 وإذا قرأت هذه الأرقام من اليمين فإنها تختلف عن قراءتها من  
 اليسار . وهذه الأعداد تظهر أيضاً فى ( س + ١ )<sup>٢</sup> ،  
 ( س + ١ )<sup>٣</sup> ، ( س + ١ )<sup>٤</sup> ، إلخ . يمكننا كتابة هذه الأعداد  
 فى جدول كالآتى :

## جدول ۶

					1	1
					1	1
				1	2	1
			1	2	2	1
		1	2	6	2	1
	1	2	10	10	2	1
1	7	10	20	10	7	1
17	21	20	20	21	7	1

والآن يمكننا أن نتحدث عن مكانك بين الرياضيين العظماء  
كان هذا الجدول معروفا منذ عام ١٥٤٤. وبالتدريج لاحظ الناس  
أنواعا كثيرة من الحقائق الغريبة عنه. ولكن بعد مضي ١٢٠ عاما  
أى فى سنة ١٦٤٤ تمكن أعظم رياضى انجليزى من ايجاد صيغة  
تعطى الأعداد فى كل عمود من أعمدة جدول ٦ العمود الأول  
واضح للغاية فهو دائما ١ العمود الثانى يحتوى على الأعداد ١ ٦  
٢ ٦ ٣ ٦ ٤ ٦ ٥ ٦ ٦ ٦ ٧ — وهو قانون بسيط، ولكن ما هى  
القاعدة التى تعطى العمود الثالث ١ ٦ ٣ ٦ ٦ ١٠ ٦ ١٥ ٦ ٢١ ٦

\* والواقع أن عمر الحيام وجد نفس الشيء . وقد شهد بذلك لانتون هوجين في كتاب الرياضة للعلميون — المترجمان .

ستجد أن هذه المسألة سهلة تماما إذ أنت استخدمت الطريقة  
المبينة من قبل في هذا الباب ، أعمل جدولا على غرار الجداول  
١- ٤ ٦ ثم ابحث عن الصيغة .

القاعدة التي وجدها نيوتن ( والتي أتمنى أن تجدها بنفسك )  
تعرف باسم نظرية ذات الحدين . هذا هو كل ما في نظرية ذات  
الحدين قاعدة لكتابة الأعداد في جدول ٦ .

الغرض من شرح  $\Delta$  ص ٦  $\Delta^2$  ص ٦ إلخ للقارىء هو أنها ربما  
تساعدك على رؤية الكيفية التي تكشف بها النظريات ، وعلى أن  
تكتشف نتائج بنفسك .

## تمارينات

١- إذا رفعت درجة حرارة ل من الأقدام من الصلب و  
من الدرجات الفahrenheit فإن طول الصلب يزداد بمقدار ٦ ..... و.  
ل و .

إذا رفعت درجة ميل من الصلب ( مثلا خط سكة حديدية )  
١٠ درجات fahrenheit فما هي المسافة الزائدة اللازمة ؟ .

٢- في الأعمال العلمية ، تقاس درجة الحرارة المئوية . وهذه  
يمكن تغييرها إلى درجات fahrenheit باستخدام القانون .

$$F = \frac{9}{5} C + 32 .$$

حيث ف من الدرجات ، م من الدرجات ترمز إلى درجة الحرارة في نظامي فهرنهايت والمئوي على الترتيب . ما هي درجة الحرارة في نظام فهرنهايت التي تناظر ١٥ درجة مئوية ؟ ما هي درجة حرارة ٩٠ فهرنهايت بالدرجات المئوية . ؟

٣ - وزن عشر أقدام من مواسير الرصاص العادية التي محيطها ٢ بوصة ٥.٥ رطلا . ما هي الصيغة التي تعطى وزن س من الأقدام من هذه المواسير ؟

٤ - القدم المربعة من الطوب العادي تستطيع أن تحمل وزنا قدره ستة أطنان بأمان . ما هو عدد الأطنان التي تستطيع أن تحملها قطعة من الطوب مساحتها س من الأقدام المربعة .

يستطيع القدم المربعة من نوع جيد خاص من الطوب أن يتحمل ٤٥ طنا . ما هو الوزن الذي تستطيع حمله س من الأقدام المربعة ؟ .

مطلوب عمل أساس من الطوب يستطيع حمل ١٠٠٠ طن . إذا كان الأساس مربع الشكل ، فما هي أبعاده إذا صنع :

( ١ ) من الطوب العادي ( ٢ ) من الطوب الجيد ؟

٥ - عندما يقطع قطار س من الأميال في الساعة فإن الضغط

الكل على مقدمة القاطرة الناتج عن ضغط الهواء ( ص باوند )  
يعطى بالجدول الآتي:

س	٠	٢٠	٤٠	٦٠	٨٠	١٠٠
ص	٠	٧٩,٥	٣١٨,٠	٧١٥,٥	١٢٧٢,٠	١٩٨٧,٥

هل توجد صيغة بسيطة تربط بين س ، ص ؟ إذا كان ذلك  
هو الحال فما هي هذه الصيغة ؟

٦ - في بعض الأحيان يرى الإنسان جدولاً يعطى ثمن  
التذكرة بين أى مكانين في طريق خط ترام ، كما هو مبين :

من	إلى	العتبة
ميدان التحرير	١ قرش	ميدان التحرير
القصر العيني	٢ قرش	١ قرش
الجيزة	٣ قرش	٢ قرش
		١ قرش

من الواضح أنه لا يلزم مثل هذا الجدول على الإطلاق إلا إذا  
كان هناك على الأقل محطتين يربط الترام بينهما . إذا كانت هناك  
ثلاث محطات سيحتوى الجدول على ثلاثة مربعات . أحسب  
عدد المربعات في الجدول عندما يكون هناك ٤ ، ٥ ، ٦ ، إلخ من  
المحطات . ما هو عدد المربعات الذي يحتاج إليه إذا كان هناك س



من المحطات ؟ هل توجد أية علاقة بالأعداد الموجود في جدول ٦؟

٧ - إذا دخلت ن من الفرق مباراة لا يلعب المهزوم فيها ثانية ، فكم عدد المباريات التي تجرى ؟ ( أنظر السؤال الموجود في نهاية الباب الخامس ) .

٨ - يحصل على القدرة بالحصان بالنسبة للسيارات في بريطانيا والولايات المتحدة من الصيغة :

$$ق = \frac{٢ ن س}{٥}$$

حيث ق = القدرة بالحصان .

ن = عدد الاسطوانات .

س = محيط الاسطوانة بالبوصات .

ما هو محيط الاسطوانة اللازم لسيارة ذات أربع أسطوانات لكي تكون قدرتها ٤٠ حصانا ؟

ما هي القيمة المناظرة لقوة ١٠ حصان ؟ ما هي القيمة التي تعطى أقل من ٢٣ حصانا ؟

٩ - تعطى قوة الشدة اللازمة لقطع جبل ذي ثلاث فتلات من القانون .

$$ل = ٥٠٠٠ س ( ١ + س )$$

حيث ل باوند هو الثقل اللازم لقطع جبل قطره ثلاث

بوصات . كم باوند تلزم لقطع حبل قطره  $\frac{1}{4}$  بوصة ؟ ما هو قطر الحبل الذى يكاد يتحمل ٦٠٠٠٠ باوند ؟ .

١٠ - الثقل وهندردويت الذى يستطيع حبل محيطه م من البوصات أن يتحمله بأمان يعطى من القانون :

$$W = M^2 .$$

كم هندوريت يمكن وضعها بأمان على حبل محيطه ٢ ، ٣ ، ٤ بوصة ؟ ما هو محيط الحبل الذى يلزم لحمل  $\frac{1}{4}$  طن بأمان ؟ ما هو عدد الحبال التى محيط كل منها ٢ بوصة يلزم لرفع  $\frac{1}{4}$  طن ؟ ( السكسور لا تستخدم . ) ما هو عدد الحبال التى محيطها ٣ بوصة والتى تلزم للقيام بنفس المهمة ؟

يمكنك أن تجد صيغا أخرى للتمرين فى كتاب المهندسين السنوى لمؤلفه كمب : Kempe's Engineers Yearbook وقد أخذت منه كثير من الأمثلة المذكورة هنا . سنجد صيغا تشمل موضوعات مختلفة من كمية الإشارة التى تتراكم من النجار إلى كمية المطر التى تسقط فى شمال الهند .

## الأشكال البيانية أو التفكير بالصور

د يوجه الاهتمام لا لىكى توجد فرصة عند السامع للفهم ، إذا كان ذلك ممكنا ، وإنما لىكى يتحدث عليه أن يفهم سواء تمكن من ذلك أم لم يتمكن ، . هنرى بت - بعض أسرار الأسلوب .

المشكلة الكبرى بالنسبة لآى مدرس هى تقديم الحقائق بطريقة تجعل الطلبة لا بد أن يروا المقصود . العبارة القوية تنسى بسرعة أما الصور الحية فتبقى فى الذاكرة . لا بد أن يكون كثير من الناس قد لاحظوا الفرق بين قراءة مرجع فى التاريخ وبين رؤية فيلم تاريخى . مهما كانت الدقة بالنسبة للكاتب والفيلم ، فمن المؤكد أن الفيلم يجعل الإنسان يتحقق أكثر من الأحداث ويتذكرها أطول .

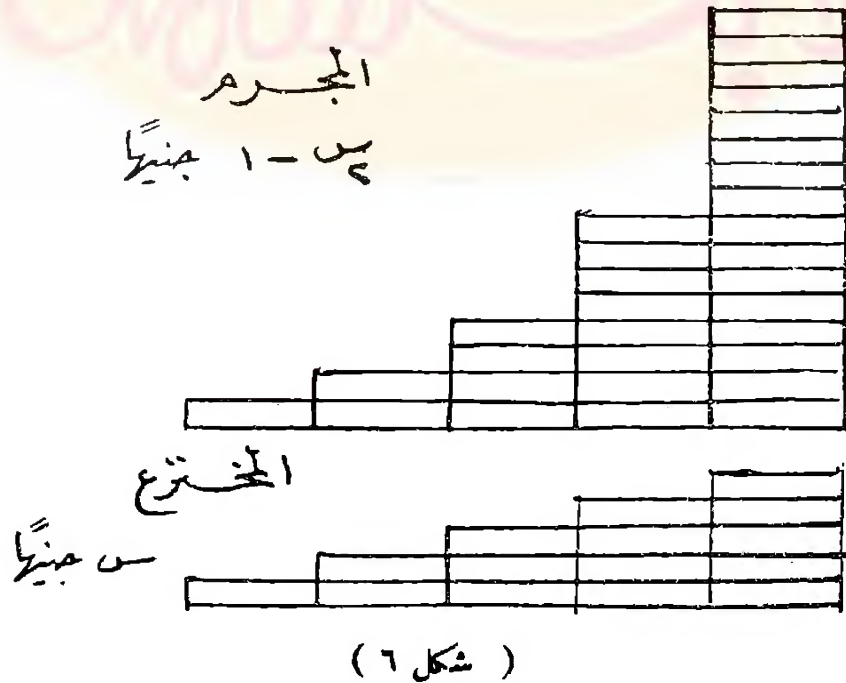
ويكون من الضرورى فى بعض الأحيان فى الأفلام شرح أفكار معقدة ، لا لفصل من الطلبة وإنما لنطارة يمثلون سكان البلد بأكمله . وبالإضافة لذلك فإن رواد السينما ليسوا مستعدين للأفكار المركزة . إنهم يريدون إراحة أنفسهم وأن يتسلوا . إنه

لما يوضح لنا الأمور جداً أن تفحص الكيفية التي تؤدي بها مخرجوا الأفلام عملهم. إنهم نادراً ما يعجزون عن إلهام وجهة النظر لرواد السينما، وهي حقيقة يجب أن ينظر إليها جدياً الانهزاميون في التربية الذين يتعلمون دائماً بغياء التلاميذ .

درسنا في الباب السابق الطرق المختلفة التي يمكن لكمية أن تنمو بها . افترض أننا رغبنا في تقديم هذه الفكرة لرواد إحدى دور السينما . كيف يمكن القيام بذلك ؟ قد ترغب في تقديم حقيقة أن ثروة رجل بدأت تنمو سريعاً، وربما النجاح الأول لمخترع . قد تصوره وهو يحفظ جنيهات ذهبية في خزانة . ففي الأسبوع الأول يضع جنيهها واحداً . وفي الأسبوع التالي يضيف جنيهين . وبعد ذلك يضيف ثلاثة جنيهات . مكسب كل أسبوع يكون كرامة، وكل كومة تحتوي على جنيهه زيادة عن الكومة السابقة لها . حسناً ، وبعد س من الأسابيع يوفر الرجل س من الجنيهات ، وارتفاع أكوام العملة المستمر في الازدياد يبين لنا بمجرد النظر معنى هذه الحقيقة . ولكن ليس من الضروري أن تنتهي الفكرة عند ذلك . للمخترع صديق يعيش على الغش والعنف ، مجرم . المجرم مصمم على أن يثبت أن الأمانة غير مجزية . أنه يبحث المخترع على أن يأتي إلى حيث يمكن الحصول على المبالغ الكبيرة من المال . إنه يضع

باحتمقار بجانب المخترع مبالغاً من المال كل أسبوع ، جنيتها واحداً في الأسبوع الأول ، جنيتين في الأسبوع الثاني، أربعة جنيتها في الأسبوع الثالث ، وثمانية جنيتها في الأسبوع الرابع ، أى أنه يضاعف المبلغ كل أسبوع . الزيادة المطردة في مكسب المخترع تصبح غير ذات مغزى بجانب ذلك . قد يوفر المخترع س جنيتها ولكن المجرم يوفر ٢ س - ١ جنيتها كل أسبوع ( شكل ٦ ) .

هذه الأرقام لا تبين فقط أن دخل المخترع ودخل المجرم ينموان . لأنها تبين مغزى الطريقتين المختلفتين اللتين ينموان بهما ، ونجد هنا الفكرة الأساسية للشكل البياني - أى الشكل الذى يبين للعين معنى التعبيرات الرياضية مثل س ، ٢ س - ١ .

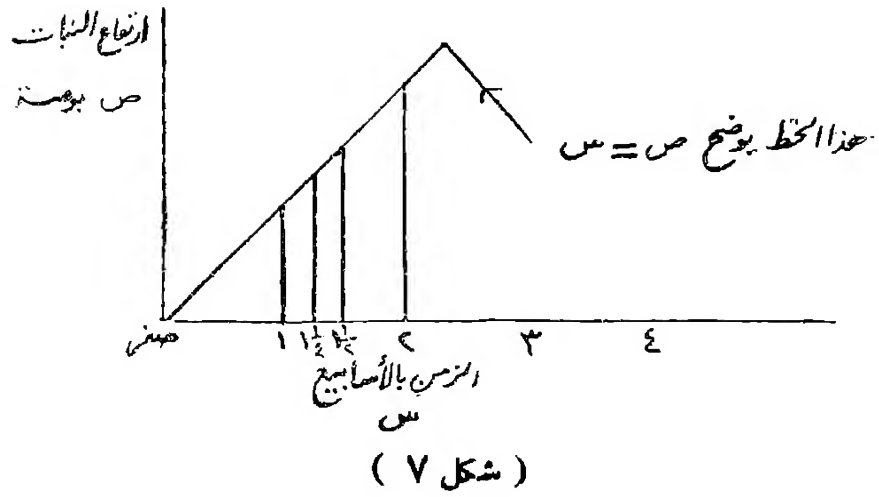




في هذا التوضيح الخاص ، اعتبرنا أن شيئاً ينمو بخطوات ،  
 بقفزات فجائية . فمثلا ما يوفره المجرم أسبوعياً يقفز من ٤ جنيه  
 إلى ٨ جنيه دون أن يمر بالقيم ٥ ٦ ٦ ٧ جنيه . ولكن من  
 الممكن أيضاً أن ينمو شيء نموا مستمرا بدون قفزات مثل النبات  
 مثلا . يمكننا أن نرسم أشكالا بيانية لتوضيح النمو المستمر ،  
 وعادة نفعل ذلك . فمثلا إذا كان نبات ينمو تبعا للقانون  
 $s = s_0 (1 + r)^t$  ( حيث  $s$  تعني ارتفاع النبات بالبوصات بعد  $s$  من  
 الأسابيع ) فإن ذلك لا يعني فقط أن ارتفاع النبات هو ١ بوصة بعد  
 أسبوع وبوصتان بعد أسبوعين . إنه يعني أن ارتفاع النبات هو  $1\frac{1}{4}$   
 بوصة بعد  $1\frac{1}{4}$  أسبوع  $1\frac{1}{4}$  بوصة بعد  $1\frac{1}{4}$  أسبوع ، وهكذا  
 وقد وضعنا ذلك بالرسم (شكل ٧) .

إن ما يحدد نوع رسمنا لمنحنى سواء كان متصلا أو يرتفع بخطوات  
 هو طبيعة العملية التي نريد توضيحها بالمنحنى : ارتفاع نبات ، المسافة  
 التي يقطعها قطار ، وزن طفل ، وهذه تعطي منحنيات متصلة .  
 عدد الأطفال في أسرة ، عدد مقاعد حزب في البرلمان ، عدد  
 السفن الحربية في الأسطول ، هذه تتغير بخطوات .

توجد حالات معينة يمكننا أن نستخدم فيها إما منحنى متصلا  
 وإما منحنى بخطوات . افرض مثلا أننا نرغب في تمثيل نمو عدد



السكان في بريطانيا من سنة ١٨٠٠ إلى ١٩٠٠ فإذا تكلمنا بدقة ، فإن هذه الكمية تتغير بخطوات ، تزداد بواحد كلما ولد طفل وتنقص بواحد كلما حدثت وفاة . ولكن التعداد نفسه يقاس بالملايين : لكي يكون للشكل البياني الذي سنرسمه أبعاداً معقولة ، ويجب أن نأخذ مقياساً بحيث يمثل كل مليون من الأفراد بما لا يزيد عن بوصة . وكل ولادة أو وفاة منفصلة تناظر تغيراً لا يزيد عن جزء من المليون من البوصة . وهذا أقل بكثير من سمك خط الرصاص ، وحتى لو أمكننا أن نرسم كل خطوة ، فلن نتمكن من ملاحظة التأثير . وبالتالي فإن منحني التعداد سيظهر كمنحنى متصل وليس على هيئة سلم .

لقد أصبحت الأشكال البيانية جزءاً لا يتجزأ من حياتنا اليومية

بدرجة أنه لا يلزم شرحها في الواقع . فعادة ، يتمكن الأشخاص الذين ليس لديهم أى تدريب رياضى من رؤية مغزى الشكل البياني لدرجة الحرارة الموجود أعلى سرير مريض ، والمنحنيات التى تبين التغيرات فى البطالة أو فى تجارة القطن تستخدم الأشكال البيانية فى توضيح تقدم حملة لجمع المال أو إنتاج مصنع . تحتوى الجرائد التجارية على أشكال بيانية تبين اتجاه الأسعار . يوجد على مصابيح أجهزة اللاسلكى اشكال بيانية تبين خواصها . وفى بعض المناطق السياحية يرى الإنسان أجهزة لتسجيل منحنيات لارتفاع وانخفاض البارومتر ، وخرائط تبين التغير فى كمية المطر المساقط وفترة ظهور الشمس من يوم لآخر . الفكرة العامة للشكل البياني مفهومة فعلا على نطاق واسع :

قد يكون من المفيد أن نشرح بالضبط كيفية رسم شكل بياني . يوضح شكل بياني ما الارتباط بين مجموعتين من الأعداد فمثلا ، نحن درسنا فعلا احتمال أن ينو نبات بالطريقة فى الجدول الآتى :

عدد الأسابيع (م)  $\frac{1}{4}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{3}{4}$   $1$   $1\frac{1}{4}$   $1\frac{1}{2}$   $1\frac{3}{4}$   $2$   
الارتفاع بالبوصات (ص)  $\frac{1}{4}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{3}{4}$   $1$   $1\frac{1}{4}$   $1\frac{1}{2}$   $1\frac{3}{4}$   $2$   
نرسم خطا أفقياً ، ونبين عليه عدد الأسابيع . ثم نرسم

مستقيمت رأسية تناظر ارتفاع النبات عند أى عدد من الأسابيع .  
فى شكل ٧ ، رسمت مثل هذه المستقيمت بحيث تناظر ١ ، ١ ١/٢ ،  
١ ١/٢ ، ٢ من الأسابيع . الخط الرأسى المناظر لأسبوع واحد ارتفاعه  
بوصة واحدة وهو ارتفاع النبات بعد أسبوع واحد . الخط  
الرأسى المناظر لزمان ١ ١/٢ أسبوع يمثل ارتفاع النبات بعد ١ ١/٢  
أسبوع . وعلى ذلك يمكننا أن نستمر فى رسم أى عدد نرغب  
فيه من الخطوط الرأسية . هذه الخطوط الرأسية تبين نمو النبات  
بنفس الطريقة التى كانت أكوام العملة تبين نمو ما يدخره المخترع  
أسبوعياً . وبعد رسم عدد كبير من هذه الخطوط الرأسية يمكننا  
أن نرى أن نهاياتها العليا تقع على مستقيم معين . ( فى أمثلة أخرى  
تقع النهايات على منحنى ) . برسم المستقيم ( أو المنحنى ) الذى  
يصل بين نهايات الخطوط الرأسية نحصل على الرسم البيانى لنمو  
النبات . وحيث أن النبات ينمو تبعاً للقانون  $v = st$  فإن  
هذا الخط يسمى شكل  $v = st$  البيانى .

يمكن بهذه الطريقة رسم شكل بيانى لأية عملية أخرى أو أية  
صيغة رياضية تصفها . سبق إعطاؤك جدولاً يبين حركة كرة  
مقدوفة فى الهواء . ارسم أنت شكلاً بيانياً يوضح هذا الجدول .  
لن تقع نهايات الخطوط الرأسية على خط مستقيم ، وإنما على  
منحنى . لاحظ كيف يعلو هذا المنحنى ما دامت الكرة ترتفع

وكيف ينزل عند ما تأخذ الكرة في السقوط . كيف يبدو الشكل  
البياني الخاص بكرة تسقط ثم ترتد ؟

في كلا هذين المثالين كانت ص دالة في س . في حالة النبات  
ص = س . وفي حالة الكرة ص = ١٠ س - س<sup>٢</sup> . ولكن ،  
لا تعتقد بأنه لا يمكن رسم الأشكال البيانية إلا إذا وجدت صيغة  
بسيطة . يمكننا أن نرسم شكلاً بيانياً يبين درجة حرارة مريض  
أو سعر اللبن : إنه لأمر بعيد الاحتمال للغاية أن توجد صيغة  
بسيطة تنفق مع أى هذين الأمرين .

### استخدام الأسطال البيانية

الأشكال البيانية لها ميزة كبيرة عن جداول الأرقام وذلك  
إذا كنا نرغب في الحصول على معلومات بمجرد النظر . من السهل  
جداً أن نمر العين على صف من الأرقام ، ولا ترى أن أحد  
الأعداد هو أكبر بكثير من بقية الأعداد . أما في حالة الشكل البياني  
فسيدو هذا العدد كقمة جبل . وأى انحناء فجأى في الشكل البياني  
يرى بسهولة ، بينما لن تكشف نظرة عابرة إلى الأرقام المناظرة  
عن وجوده . والأشكال البيانية مفيدة بصفة خاصة للرجال  
المثقلين بالأعباء الذين يريدون أن يعرفوا الخطوط العامة لمسألة  
ما دون الدخول في جميع التفاصيل الصغيرة .





يبين الشكل البياني صادرات نسيج القطن بملايين الجنيئات خلال السنوات المبينة. يمكننا في ثوان قليلة أن نرى الخطوط العريضة لحالة لانكشير في هذه الفترة وما نتيجته من الأرقام الفعلية هو أقل من ذلك بكثير. حاول بنفسك أن تأخذ عموداً من الأرقام من إنسكلوبيديا (دائرة المعارف) أو كتاب سنوي

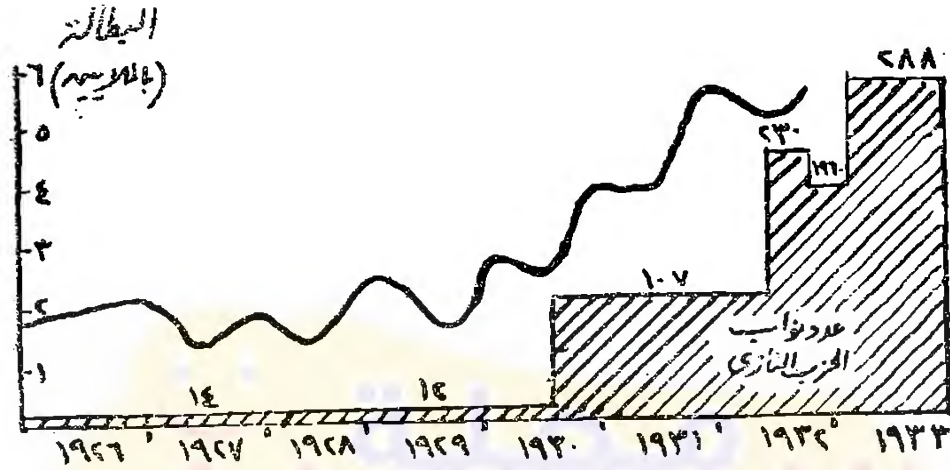
انظر للأرقام مدة خمس عشرة ثانية ثم ابعدها واكتب الأشياء التي لاحظتها . متى تكون الأعداد أكبر ما يمكن ، متى تكون صغيرة ، متى تنمو ، متى تأخذ في النقصان ، ... إلخ . لن نلاحظ الشيء الكثير في زمن قصير . والآن ارسم شكلاً بيانياً يمثل هذه الأعداد ولاحظ كيف يبين الشكل أموراً فاتت عليك .

هذا هو أبسط استخدام الأشكال البيانية وهو إعطاء فكرة عامة . قد يرغب عالم تاريخ أو عالم اقتصاد أن يعرف مجرد أن لانكشير كانت في حالة رواج سنة ١٩٢٠ وأن تدهوراً حاداً حدث في سنة ١٩٢١ . نظرة واحدة لشكل بياني خاص بصادرات القطن ستذكره بهذه الحقيقة .

وأيضاً ، يمكن استخدام الأشكال البيانية لإيضاح الربط بين حدثين . أغلب الكتب التي كتبت عن ألمانيا تشير إلى كيف أن البؤس الذي كان موجوداً في ألمانيا خلال الأزمة الاقتصادية العالمية تولى عنه التطرف واليأس وساعد على ظهور الحزب النازي . إلى أي حد نستطيع أن نقبل صحة هذا الرأي ؟

دعنا نرسم على نفس الورقة شكلين بيانيين ، يبين أحدهما

مقدار البطالة في ألمانيا والآخر يبين عدد النواب من الحزب النازي ، وذلك في الفترة بين سنة ١٩٢٦ و سنة ١٩٣٣ ( شكل ٨ ) .



( شكل ٨ )

يبين الشكل على الفور أن هناك بعض الحقيقة في الفكرة . في خلال سنوات الأزمة لم ينجح في الانتخابات إلا عدد قليل من نواب الحزب النازي : ١٤ ، ١٢ . ويرتفع المنحنيان في غالبتهما معاً .

ومع ذلك ، فمن السخف محاولة إيجاد صيغة رياضية لربط الشئيين . فعدد النواب يتغير بخطوات عند كل انتخاب عام . البطالة وعدم الطمأنينة ليسا السببين الوحيديين اللذين يؤثران على الموضوع . فمثلا هزيمة النازيين في سنة ١٩٣٢ كان نتيجة

لأسباب سياسية ، معارك فيما بين النازيين ، اعتقاداً بأن الجيش سيتخذ موقفاً عدائياً ضد هتلر ، وهكذا .

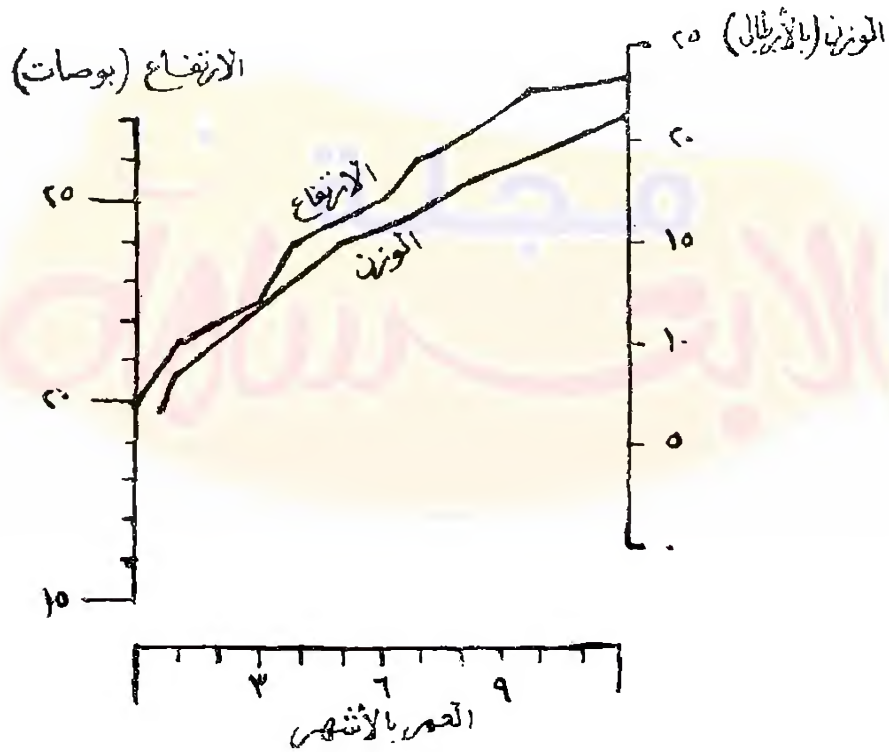
سنلاحظ كيف توجه الأشكال البيانية انتباهك إلى حقائق لم تفسر وتدفعك لزيادة التقصي . لا يعطينا الشكل إشارة للإجابة المحتملة للسؤال فحسب : إنه يجعلنا نلاحظ هبوط عدد الأصوات التي حصل عليها الحزب النازي في نهاية سنة ١٩٣٢ ، وهو أمر لا يوجد أى ارتباط بينه وبين الشكل البياني للبطالة . وبذلك يدفعنا الشكل إلى البحث عن حقائق أخرى لتفسير هذا الهبوط .

وأيضاً ، لا يستطيع الإنسان أن يتجنب ملاحظة الشكل الموجي لمنحنى البطالة ، الذي يرتفع كل شتاء وينخفض كل صيف ، وهذا يذكرنا بأنه توجد بعض الصناعات ، مثل صناعة البناء تتوقف عن العمل عندما يسوء الطقس . ويبدو أن صيف سنة ١٩٥٦ كان حالة استثنائية . وقد يتعجب المرء ويتساءل عن السبب . كلما نظرنا مدة أطول للشكل البياني زاد عدد الأسئلة التي تنشأ وزادت المعلومات التي تساعدنا على التذكر .

من المفيد جمع الأشكال الخاصة بأى موضوع يهتم به شخص . كثيراً ما يسمع الإنسان ملاحظات ويتساءل عما إذا كان هناك دليل على صدقها . وعادة تكفى زيارة لمكتبة عامة للاستدلال على صحة أو عدم صدق بيان ما : إذا أمكن توضيح المسألة بواسطة

شكل بياني فستكون لدينا طريقة لتسجيل معلومات كثيرة في حين صغير . ولن يكون ضرورياً أن تبحث عن نفس الحقائق مرة أخرى . وبمرور الوقت ، سيحتوي جميع الأشكال البيانية في الغالب على حقائق تثير الاهتمام .

في كتاب « فن القراءة » ، يذكر « كويلر كوش » ، أن فتاة احتفظت بشكل بياني يبين الحضور في كنيسة إحدى القرى ،



الشكلان البيانيان يبينان طول ووزن طفل في السنة الأولى من عمره . إذا لم يتفق الشكل البياني للوزن مع الشكل البياني للطول ، فهناك شيء غير عادي .



وحاولت أن تجد سبب كل زيادة أو نقص يحدث . ولا بد وأن تكون الفتاة قد حصلت على معرفة هائلة بصفات الواعظين وعادات القرية .

يستخدم الأطباء الأشكال البيانية لمعرفة ما إذا كان الأطفال يحصلون على تغذية مناسبة . نرسم شكلين بيانيين لوزن الطفل وطوله على ورقة واحدة . إذا كانت صحة الطفل جيدة ، يرتفع المنحنيان معا . إذا كان الطفل لا يحصل على الغذاء الذي يحتاج إليه فإن منحنى الوزن لا يسير مع منحنى الطول ويكون منخفضا عنه . ولا يلزم أن ينتظر الطبيب حتى توجد مسافة كبيرة بين المنحنيين . إذا لاحظ أن منحنى الوزن قد بدأ في الانحناء إلى أسفل فإن ذلك قد يكون أول علامة على أنه يوجد شيء ما ، لا يسير كما يجب . وإذا عولج الطفل علاجا خاصا أوزيدت وجبات غذائه ثم لوحظ أن المنحنى بدأ ينثنى إلى أعلى ثانية فإن الطبيب سيعلم أن صحة الطفل بدأت تتقدم .

يتركب جانب من علم تفسير الأشكال البيانية من معرفة كيف يبدو شكل بياني عندما يزداد شيء ما ، وعندما يزداد بسرعة كبيرة ، وعندما يزداد بسرعة متزايدة ، وعندما يزداد ولكن بدرجة تقل أكثر فأكثر ( ارسم أشكالا بيانية لتوضيح هذه الحالات المختلفة ) .

النتائج التي استخلصت من الأشكال البيانية في جميع هذه الأمثلة

كانت ذات طابع عام . يرى الطبيب أن صحة الطفل تتقدم أو تسوء ، ولكنه لا يحاول قياس درجة التقدم ، لا يستطيع أن يقول إن صحة الطفل هي ٨٠٪ إلا بقدر ما يمكننا أن نقول إن شخصا سعيد ٨٠٪ أو أمين ٨٠٪ ، فالأمور مثل الصحة والسعادة والأمانة لا يمكن قياسها إلا بطريق غير مباشر . فإحصاء الوفيات ، حالات الانتحار ، جرائم السرقة ، قد تلقى بعض الضوء على هذه الأمور . ولكن من الممكن للغاية أن نعرف الكثير عن درجة صحة ، سعادة ، أمانة شخص بدون أن نتمكن من إعطاء رقم واحد يخص أى شيء يمكن قياسه .

ومن ناحية أخرى ، توجد بعض جوانب للحياة تلعب فيها القياسات دورا كبيرا . وهذا صحيح على الخصوص بالنسبة للموضوعات مثل الهندسة والكيمياء والطبيعة .

كرة صغيرة نسبيا موضوعة على شريط سكة حديدية قد تكفي لإخراج القطار عن الشريط . إذا كان كرسي رمان بلى أكبر مما يجب بمقدار واحد من الألف من البوصة فقد يأخذ كل الوزن المفروض توزيعه على عدة كراسى رمان بلى ، كما يبلى بسرعة كبيرة . فى مثل هذه الأمور يكون من الضرورى عادة إجراء حسابات مضبوطة للغاية . لهذا السبب ، لا يقنع المهندسون والعلماء بالبيانات التقريبية . وهم فى بعض الأحيان يرغبون فى قول ، إن منحنى

لا يرتفع ببطء، وإنما إنه يرتفع بمعدل ١ في ١٠٠ أو ١ في ٨٧. ولقد تطور جزء كبير من علوم الرياضة نتيجة لمحاولة إجابة مثل مطالب المهندسين هذه: لقد اكتشف الرياضيون مجموعة كاملة من الأعداد يمكن الإنسان بواسطتها، ليس فقط أن يصف، بل أن يقيس بالضبط ما يفعله منحني عند أية نقطة. الباب القادم، وموضوعه دراسة السرعة، سيوضح كيفية القيام بذلك.

### الرياضيون والأشكال البيانية

يستخدم الرياضيون الأشكال البيانية لأغراض كثيرة مختلفة، سنبين بعضها في الفقرات التالية.

يمكن أن نستخدم الأشكال البيانية لتساعدنا على معرفة الموضوع الذي نتكلم فيه. يحدث كثيراً عندما نقوم بإجراء عمليات طويلة بالرموز الجبرية، يحدث أن نفقد معنى هذه الرموز ويكون لدينا في النهاية صيغة حصلنا عليها باستخدام قواعد الجبر ولكننا لا ندري ما معناها. إذا لم نقنع بالحصول على الصيغة الصحيحة وحاولنا أن نتحقق من معناها فإن ذلك يجعل فهمنا للموضوع أرسخ.

مثلا القانون .

$$ق = ٣٦٤ ع - \frac{ع^٢}{٢٧٠٠٠٠}$$

يعطى القدرة « ق » ، التى تتولد عند تحرك أسطوانة بواسطة سير جلدى ، ع تمثل السرعة التى يسير بها السير الجلدى بالقدم فى الثانية . هذا القانون صحيح فى ظروف معينة لا تهملنا فى الوقت الحاضر .

ما الذى يعنيه هذا القانون ؟ إنه يحتوى على نتيجة غريبة . من الطبيعى أن يفترض الإنسان أنه بإدارة البكرة المحركة بسرعة كافية ، يمكننا الحصول على أية قدرة نرغب فيها ولكن ارسم المنحنى ق مع أخذ قيم ع بين ٠ ، ٨٠٠٠ سنجد أن ق تزداد إلى أن تصل ع إلى القيمة ٥٧٠٠ ، وبعد ذلك تنقص . أما إذا أنت جعلت السير يتحرك بسرعة أكبر من ٥٧٠٠ قدم فى الثانية فإن القدرة التى تحصل عليها لا تزداد وإنما تقل . نظرة عابرة للمنحنى تبين ذلك . أما إذا لم يرسم الإنسان المنحنى واستخدم القانون استخداماً أعمى فقد يقع فى أخطاء خطيرة ، مثل تصميم آلات تسير بسرعة كبيرة بدرجة تجعلها غير اقتصادية .

---

\* كل من القانون والمنحنى موجود فى كتاب تطبيق الميكانيكا للهندسة مؤلفه ج . جودمان الجزء الأول ص ٣٥٥ ؛ الطبعة التاسعة .  
J. Goodman Mechanics Applied, To Engineering



من الممكن أن تساعد الأشكال البيانية أى شخص يدرس  
 الرياضة مساعدة كبيرة . وكثير من الناس يمكنهم أن يتتبعوا  
 جميع خطوات حل مسألة عندها يبين الحل لهم، ولكنهم يعجزوا  
 عن اكتشاف الحل بأنفسهم . ويفهمون كل خطوة منفصلة  
 لكنهم لا يعرفون أية مجموعة من الخطوات ستخرجهم من الغابة  
 لا يمكن التغلب على هذه الصعوبة إلا إذا تعلم الإنسان أن يرى  
 معنى الصيغ الرياضية كثير من الرياضيين يفكرون فى مسائلهم  
 طوال اليوم ، مهما كان المكان الذى يوجدون فيه . إنهم لا  
 يتذكرون جميع القوانين : إنهم يذكرون صورة أوجدتها المسألة  
 فى عقولهم . وهم يستمرون فى التفكير فى هذه الصورة إلى أن  
 تطرأ فى ذهنهم طريقة لحل المسألة . وبعد ذلك يذهبون إلى منازلهم  
 لأوراقهم وأقلامهم ومجموعات القوانين الخاصة بهم ثم يعملون  
 على تسجيل الحل الكامل . الأشكال البيانية هى إحدى الطرق  
 التى يمكن بها تكوين صورة مسألة .

إنه لتمرين جيد أن تجمع أو أن تعتمد على الأشكال البيانية  
 للدوال التى تقابلها فى العمل كثيراً مثل  $ص = س$  ،  
 $ص = ٢س + ١$  ،  $ص = ٣ - ٢س$  ،  $ص = س^٢$  ،  
 $ص = س^٢ + ٢س + ٥$  ،  $ص = س^٣$  ،  $ص = ٢س$  ،  $ص = \frac{١}{٢}س$  ،  
 وهكذا .



كثيراً ما يحصل الإنسان في العمل العلمي على مجموعة من النتائج بالتجربة ، ثم يحاول أن يجد صيغة رياضية تتفق مع هذه النتائج . هذه المسألة قد تكون بالغة الصعوبة وذلك لوجود عدد كبير من الأنواع المختلفة من الصيغ ، وقد يكون أى نوع منها هو النوع الصحيح وغالباً يكون من المساعد لنا أن نمثل النتائج التجريبية بشكل بياني . إذا كانت الأشكال البيانية لكثير من الدول مألوفة لشخص ، فإنه قد يتعرف على نوع الدالة التي تنتج مثل هذا الشكل البياني . مثلاً جميع الدوال التي أشكالها البيانية خطوط مستقيمة هي من النوع  $v = as + b$  .

وبالطبع يتضمن العمل دائماً أخطاء بسيطة ولا نتوقع أن تقع جميع النقاط على منحنى أملس . وننشأ مثل هذه الأخطاء البسيطة في القياسات نتيجة لأسباب مختلفة : سمك الخطوط على مسطرة عند قياس طول مثلاً . وفي بعض الأحيان تقع في خطأ كبير ، مثلاً قد نكتب ٧٩١٧ بدلاً من العدد ٧١٩٧ ، أو قد ننسى قفل دائرة كهربائية في أثناء إجراء تجربة . يمكن العثور بسهولة على مثل هذه الأخطاء الكبيرة على الشكل البياني . جميع القراءات تقترب من منحنى أملس ، ولكن النقطة التي تمثل الخطأ تقع بعيداً عن المنحنى ويشك فيها المرء على الفور .

وطريقة العثور على الأخطاء هذه ليست مفيدة في العمل

العلمى فحسب وإنما هى مفيدة للرياضة ذاتها . فمثلا ، عند حساب مجموعة من الأعداد قد نخطئ فى عدد أو عددين منها ، وغالبا نستطيع أن نعتز على الأعداد غير المضبوطة من الشكل البيانى . فإذا كانت جميع الأعداد مضبوطة سيكون الشكل البيانى منحنى أملاسا ، أو وعلى الأقل هذا الأمر صحيح بالنسبة للأغلبية العظمى من الحالات .

لا تمكنا الأشكال البيانية من التعبير عن صيغة رياضية بمنحنى فحسب ، بل إنها تمكنا من وصف المنحنى بواسطة الصيغة . فمثلا عندما لا توجد ريج يكون الماء الخارج من خرطوم أو ماسورة صغيرة على هيئة منحنى بسيط . إذا وضعت لرحلة إلى جانب تيار الماء فإنه يمكن اقتفاء المنحنى ويمكننا أن ندرس بعد ذلك هذا المنحنى ونحاول أن نجد الصيغة التى هى المنحنى الخاص بها . والصيغة ، بمجرد الحصول عليها ، تعطى اسماً للمنحنى . وفرع الرياضة المعروف بالهندسة التحليلية مبنى على فكرة وصف كل مستقيم أو منحنى بالصيغة المناظرة له . إذا أردت أن تدرس الهندسة التحليلية ووجدت أن الكتب المفردة صعبة فأفضل شيء تعمله هو أن تجرى تجارب على المنحنيات بنفسك . ارسم المنحنيات من النوع  $y = x^2 + b$  ، مع أخذ قيم كثيرة مختلفة لـ  $b$  من  $-1$  ،  $0$  ،  $1$  ، موجهة وسالبة كبيرة وصغيرة . حقق صحة العبارة التى

ذكرناها فيما سبق وهي أن جميع مثل هذه المنحنيات هي خطوط مستقيمة . ما الذي تلاحظه على الشكلين البيانيين  $s = 1$  ،  $s = 2$  هل تستطيع إيجاد صيغة رياضية تعطى مستقيماً يتعامد مع  $s = 1$  ؟ أجر تجارب هذه المستقيمت . وسجل تجاربك وحاول أن تصل إلى نتائج عامة : أنظر كم من الزمن يمضي إلى أن تستطيع أن تعرف بمجرد النظر إلى الصيغ ما إذا كان مستقيمان ، متعامدين ، وبعد ذلك اقرأ الباب الموجود في الكتاب تحت عنوان « الخط المستقيم » ، أو « معادلة الخط المستقيم » ، وستجد فيه نفس النتائج التي وصلت إليها مكتوبة بلغة شخص آخر . وحيث إنك تعرف فعلاً ما يريد المؤلف قوله فإن يمضي وقت طويل قبل أن تفهم لغته :

### أمثلة

١ - ارسم الأشكال البيانية الآتية . ما الذي تلاحظه بالنسبة لها ؟ كيف يمكنك وصف الأشكال التي تكونها بالكلمات ؟

$$(1) \quad s = 2 \quad (2) \quad s = 1 + 1$$

$$(3) \quad s = 2 + 2 \quad (4) \quad s = 5 - \frac{1}{4} s$$

٢ - ارسم وصفاً ، كما في السؤال الأول ، للأشكال البيانية الأربعة الآتية :

- (١) ص = ٣ س (ب) ص = ٣ س + ١  
 (ح) ص = ٣ س + ٢ (د) ص = ٤ - ١ س .  
 ٣ - ما الذى تلاحظه بالنسبة للشكلين البيانيين الآتين ؟  
 (١) ص = ٢ س + ٢ (ب) ص = ٢ س + ٤ + ٣ .  
 ٤ - ارسم المنحنى ص = س ( ٩ - س ) . ماهى قيم س  
 التى تجعل ص أكبر ما يمكن وماهى أكبر قيمة للدالة ص ؟  
 ٥ - ما الذى تلاحظه بالنسبة للأشكال البيانية للصيغ الآتية ؟  
 (١) ص = ٢٥ - ٢ س (ب) ص = ٢ س + ٤ .

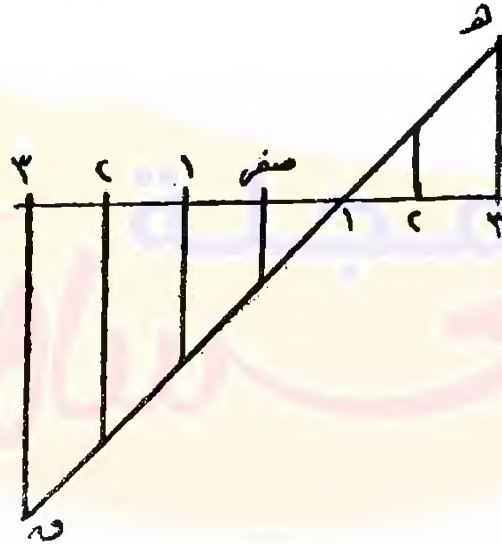
### الأعداد السالبة والأشكال البيانية

غالباً ما نرغب فى رسم منحنى تكون س أو ص أو كلاهما  
 أعداداً سالبة فى جزء منه . فمثلاً قد نرغب فى رسم منحنى يبين  
 طول قضيب حديدى عند درجات حرارة أقل من الصفر . إذا  
 كانت س من الدرجات هى درجة الحرارة فإن ذلك يعنى أن س  
 عدد سالب . إذا كانت النقطة س = ١ فى رسمنا البيانى تبعد  
 بوصة على اليمين فإن النقطة س = - ١ ستبعد بوصة على اليسار .  
 س = - ٢ ستبعد بوصتين على اليسار وهكذا . وبنفس الطريقة

إذا كانت ص = ١ هي بوصة إلى أعلى فإن ص = - ١ هي بوصة إلى أسفل .

دعنا مثلاً نرسم المنحنى ص = س - ١ لقيم س الواقعة بين - ٣ ، ٣ . نحصل أولاً على الجدول :

س	٣ -	٢ -	١ -	صفر	١	٢	٣
ص	٤ -	٣ -	٢ -	١ -	صفر	١	٢



نعين قيم س على خط مستقيم س = ٣ تقع على بعد ٣ بوصة على يمين موضع الصفر ، - ٣ على بعد ٣ بوصة على يسار موضع الصفر ، وهكذا . وبعد ذلك نبين قيم ص المناظرة كخطوط رأسية . عندما س = ٣ ، ص = ٢ ، وعلى ذلك نرسم مستقيماً إلى أعلى طوله ٢ بوصة من موضع س = ٣ . عندما س = - ٣ ، ص = - ٤ ، وعلى ذلك نرسم خطاً إلى أسفل طوله ٤ بوصة



من موضع  $s = -3$  . نهايات هذه الخطوط الرأسية تعطينا  
المستقيم  $q$  ك وهو الشكل البياني المطلوب للصيغة  $s = -1$  .

سنرى إحدى ميزات استخدام الأعداد السالبة في الأمثلة  
التي سنعطياها عن شكل الكبارى غالبا ما تكون الصيغة الرياضية  
أبسط بكثير إذا اخترنا  $s = 0$  في منتصف الكبرى عن لو  
أخذناها في نهاية الكبرى .

٦ - ارسم منحنى  $s = 2$  لقيم  $s$  الواقعة بين ٢ ، ٦ . هذا  
يعطى جزءاً من خط مستقيم . باستخدام مسطرة ، مد هذا المستقيم  
في الاتجاه الجنوبي الغربي . حقق أن هذا الخط يمر بالنقط المعطاة  
في الجدول عندما تقع  $s$  بين ٢ ، ٤ .

٧ - ارسم المنحنى  $s = 5$  لقيم  $s$  بين صفر ، ٥ .  
يعطى هذا جزءاً من خط مستقيم . مد هذا المستقيم باستخدام  
مسطرة . اقرأ القيم المناظرة لكل من  $s = 6$  ،  $s = 7$  .  
ما هي قيم  $s$  التي تجعل  $s$  تسارى ٦ ، ٧ ؟ هل يتفق ذلك  
مع طريقة إيجاد ٥ - (١-) ، ٥ - (٢-) المشروحة في  
الباب الخامس ؟

٨ - الرسوم البيانية لوصف الأشكال .

« يحتوى كتاب استخدام الصلب فى البناء ، لمؤلفيه : د. ر. ب .  
وي ، ن . د . جرين ، على رسوم بسيطة لكبرى مشهورة مختلفة  
ويبدو أن المنحنيات المعطاة فى الكتاب تتفق مع الأشكال  
البيانية التالية :

( ١ ) كوبرى لانيجوين فيادكت بسويسرا . القوس المركزى  
المصنوع من الصلب المقوى يشبه المنحنى :  
ص = ٢ - ٢/٩ س<sup>٢</sup> :

( ب ) القوس الطويل المنخفض لكوبرى تويد الماسكى ببروك ،  
ص = ١ - ٢/٧ س<sup>٢</sup> ، من س = - ٤.٣ إلى س = ٤.٣ .

( ح ) القوس السفلى على الكوبرى المعلق الواقع إلى جانب  
كوبرى البرج : ص =  $\frac{٩ س^٢}{٨٠}$

( د ) قوس كوبرى شلالات فكتوريا :  
ص =  $\frac{١١٦ - ٢١ س^٢}{١٢٠}$

الخطان الرأسىان موجودان عند

س = ٢.٣٥ ، س = - ٢.٣٥ .

الخط الأفقى واقع على ارتفاع ص = ١.٢٥ .



الخطوط الرأسية في كوبرى شلالات فكتوريا

٩ - يوجد خطأ في كل من مجموعات الأعداد الآتية . من المفروض أن تعطى جميع أعداد كل مجموعة منحني أملسا في حالة رسمها بيانياً . ما هي الأعداد غير المضبوطة ؟ ما هي الأعداد المضبوطة التي يجب استبدالها بها ؟ ( لا نتوقع إلا إجابة تقريبية للجزء الثاني من السؤال . )

( أ ) ١٠ ، ١٣ ، ٦١ ، ١٩ ، ٢٢

( ب ) ٤ ، ١١ ، ١٣ ، ١٩ ، ٢٠ ، ١٩ ، ١٦

( ج ) ٠ ، ٠ ، ٥ ، ٩ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٤

( د ) ٢٣ ، ٣٤ ، ٤١ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥٢ ، ٥٣

( هـ ) ٣٦١٠ ، ٤٠٠٠ ، ٤٤١٠ ، ٤٦٤٠ ، ٥٢٩٠ ، ٥٧٦٠

١٠ - أحد الأعداد الآتية غير مضبوط ولكنه لا يبعد كثيراً عن القيمة الصحيحة . هل يمكنك معرفة أى الأعداد هو ؟

٣٨٤٤ ، ٣٩٦٩ ، ٤٠٩٦ ، ٤٢٥٢ ،

٤٣٥٦ ، ٤٤٨٩ ، ٤٦٢٤ ، ٤٧٦١

( من المحتمل أنك لن تتمكن من القيام بذلك باستخدام طريقة السؤال التاسع . الغرض من السؤال هو توضيح ما لا نستطيع أدائه بسهولة باستخدام الأشكال البيانية . الغرض من السؤال التاسع هو توضيح ما يمكن أدائه باستخدام الأشكال البيانية . ستجد في مكان ما من هذا الكتاب طريقة تعطيك دليلاً لحل هذا السؤال الأخير ) .

١١ - حتى لو تمكنت من إجابة السؤال العاشر باستخدام الشكل البياني ، فمن المؤكد أنك ستحتاج لطريقة أخرى للعثور على العدد الخاطئ في مجموعة الأعداد الآتية :

٦٧٢٤ ، ٦٨٨٩ ، ٧٠٦٥ ، ٧٢٢٥ ، ٧٣٩٦ ، ٧٥٦٩ .

**\*\* معرفتي \*\***

**[www.ibtesama.com](http://www.ibtesama.com)**

**منتديات مجلة الابتسامه**

## الباب العاشر

### حساب التفاصيل — دراسة السرعة

« في عهد التلمذة الصناعية أردت أن أتعلم الهندسة النظرية ولم يكن أمامي سوى كتابين امتلأ بالرموز الرياضية المجهولة ، وكان غيرى من الصبية يتشاءون ويمجرون وراء ملاذاتهم بينما كان همى الوحيد معرفة  $\frac{ص}{س}$  وعلامة التكامل . وحينما أنظر الآن إلى الوراأ أرى أنى قضيت السنين ألث جريا وراء معرفة كيفية استخدام هذين الرمزين . »

جون برى

السرعة هى إحدى الكلمات المنتشرة فى حياتنا الحديثة . لذلك كان من الطبيعى لعلماء الرياضة الذين اشتركوا فى كل تقدم علمى وصناعى تقوم عليه الحياة الحديثة أن يكون لهم مجموعة خاصة من الرموز لوصف السرعة وموضوع خاص يبحث فى استعمال هذه الرموز . ولم يتمكن علماء الرياضة من مقاومة إغراء الأسماء



الرنانة شأنهم في ذلك شأن غيرهم فعرف الموضوع باسم حساب التفاضل والتكامل .

ومن المحتمل أن تجد رموز حساب التفاضل والتكامل في أى موضوع يعالج أشياء تتحرك أو تنمو أو تتغير . وتظهر هذه الرموز حتى في الموضوعات التي لا يبدو فيها شيء متحرك فتقول إن طريقاً ينحني فجأة . كما تتكلم عن مقدار السرعة التي تغير بها قضبان السكك الحديدية اتجاهها فلا الطريق ولا القضبان تتحرك على الإطلاق . وبالرغم من ذلك فإننا نعني شيئاً عندما نستعمل مثل هذه العبارات . الكلمات التي كانت أصلاً تعني وصف الحركة ، بسرعة ، فجأة ، يمكن استعمالها لوصف أشياء ليس فيها حركة تماماً كالرموز التي تحل محل الكلمات في البحث الرياضى . فهي أيضاً يمكن استعمالها لوصف منحني طريق أو قضبان السكك الحديدية أو أى شيء من هذا القبيل . وعلى ذلك لحساب التفاضل موضوع يمكن تطبيقه على أى شيء يتحرك أو يتغير أو له شكل محدد وهذا لا يستثنى كثيراً . فهو مفيد لدراسة المسكينات بجميع أنواعها ، الإضاءة الكهربية ، اللاسلكى والاقتصاديات والتأمين على الحياة ففي المائتى سنة التالية لاكتشاف حساب التفاضل كان التقدم الأساسى في الرياضيات ينحصر في تطبيقاته . ولم يستحدث في الرياضيات إلا القليل جداً من الأفكار الجديدة . إذ بمجرد

التمكن من النظريات الأساسية لحساب التفاضل فإنه يمكن حل مجموعة ضخمة من المسائل بدون صعوبة تذكر . إنه حقاً لموضوع جدير بالدراسة .

### المسألة الأساسية

تتلخص المسألة الأساسية في حساب التفاضل في إيجاد السرعة التي يتحرك بها جسم إذا علمت القاعدة التي تعطى موضعه في أية لحظة .

فمثلاً قد يعطى لنا الجدول الآتي لحجر يتدحرج أسفل سفح جبل :

#### جدول ٧

٦	٥	٤	٣	٢	١	الزمن بالثواني
٣٦	٢٥	١٦	٩	٤	١	المسافة المقطوعة (بالقدم)

هذه القاعدة بالطبع سهلة جداً :  $v = s^2$  حيث  $s$  الزمن بالثواني اللازم لقطع مسافة  $v$  قدم .

الآن قد يطلب منا السرعة التي يتحرك بها الحجر ما دمنا نعلم مكانه عند أية لحظة . دعنا نحاول إيجاد السرعة التي يتحرك بها بعد ثانية واحدة .

أول كل شيء إنه من السهل أن نرى أن سرعة الحجر تزداد باستمرار ففي الثانية الأولى يتحرك قدما واحدة فقط وفي الثانية الثالثة خمس أقدام وهكذا بزيادة قدمين لكل ثانية تمر .

لكن هذا لا يدلنا عن مقدار السرعة التي يتحرك بها بعد ثانية واحدة ولو أنه يساعدنا في الحصول على فكرة من الجواب ففي خلال الثانية الأولى يتحرك الحجر قدما واحدة بسرعة متوسطة مقدارها قدم واحدة في الثانية .

هذا لا يعنى أن سرعته قدم واحدة في الثانية فالعربة التي تقطع ٣٠ ميلا في الساعة لا تتحرك بسرعة ٣٠ ميلا في الساعة . فإذا كان صاحبها يعيش في بلدة كبيرة فإن العربة تسير ببطء وهي في طريقها لخارج البلدة . ثم يعوض ذلك بأن تسير بسرعة ٥٠ ميلا في الطريق الرئيسى للبلدة . إن الحجر المتدحرج يعمل نفس الشيء إنه يبدأ ببطء ولكنه يعمل على زيادة سرعته طول الوقت . فإذا قطع قدما واحدة في الثانية الأولى فإن سرعته في نهاية هذه الثانية يجب أن تكون أكبر من قدم واحدة في الثانية لأنها تصل إلى أكبر سرعة ( أثناء الثانية الأولى ) عند النهاية تماما .

وتستمر زيادة سرعته في أثناء الفترة الثانية حيث يقطع ثلاث أقدام ، ونتيجة لذلك في بداية الفترة الثانية لابد أن تكون

السرعة أقل من ثلاث أقدام في الثانية . وعلى ذلك فبعد ثانية واحدة تقع السرعة بين قدم واحدة في الثانية ، ٣ أقدام في الثانية . هذا أحسن ما يمكن عمله إذا اعتبرنا الزمن فقط بالثواني الكاملة . ولكن لا داعي للتمسك بالثواني الكاملة . إنه يمكن بالمثل تطبيق قاعدتنا ص ١ = س<sup>٢</sup> لكسر من الثانية . فإذا حسبنا المسافة المناظرة إلى ٩ ، ثانية ، ١ و ١ ثانية فإننا نحصل على جدول أصغر .

#### جدول ٨

س	١	١	١
ص	٨١	١	١,٢١

ويمكننا ثانية أن نطبق نفس الطريقة تماما في عشر الثانية ما بين ٩ ، ١ ، يقطع الحجر ١٩ ، من القدم وهذا يعطى سرعة متوسطة مقدارها  $\frac{١٩}{١٠}$  قدم في الثانية أى ١٩ قدم في الثانية وبنفس الطريقة تكون السرعة المتوسطة في عشر الثانية الذى يتلو الثانية الأولى هو ١ ، ٢ قدم ثانية وبذلك يقع الرقم الذى نريده بين ٩ و ١٦ ، ٢ ولا يكافئنا الحصول على هذه النتيجة أى عمل أكثر من القسمة العادية .

ولكن بهذه الطريقة لا يوجد حد لدرجة الدقة التى يمكن

الحصول عليها . فإذا اعتبرنا واحداً من المائة من الثانية قبل وبعد ثانية واحدة فإننا نجد أن السرعة تقع بين ١٩٩ و ٢٠١ قدم في الثانية . وإذا أخذنا واحداً من ألف من الثانية فإننا نجد أن السرعة تقع بين ١٩٩٩ و ٢٠٠١ قدم في الثانية . ما يوقفنا عن إعتبار واحد من مليون من الثانية أو واحد من بليون من الثانية إذا شئنا ذلك . إنها سرعة واحدة فقط التي تحقق كل هذه الشروط هي ٢ قدم في الثانية .

وهذا هو الجواب المطلوب .

بنفس الطريقة تماماً نحصل على السرعة بعد ثانيتين من الجدول كالتالي : —

#### جدول ٩

س	١٩	٢	٢١
ص	٣٠٦	٤	٤٠٤

الذي يبين أن السرعة بعد ثانيتين تقع بين ٣٠٦ و ٤٠٤ وفي الحقيقة أن السرعة هي ٤ قدم / ثانية .

وبذلك يمكن إيجاد السرعة بعد أي زمن ويمكن جمع نتائج ذلك في الجدول الآتي :



## جدول ١٠

الزمن بالشواني	١	٢	٣	٤	٥	٦
السرعة (بالقدم فى الثانية)	٠	٢	٤	٦	٨	١٠
ومن السهل أن نرى القاعدة من هذا الجدول . تكون السرعة						
٢ س بعد ٥ ثانية .						

أولا يوجد الفرد السرعات المناظرة إلى ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، إلخ ثم ( بالطريقة المبينة فى الفصل الثامن ) يحاول أن يجد صيغة تحقق هذه الأرقام لتعطى قاعدة للسرعة بعد ٥ ثانية . وهذه تمكن الفرد على أية حال من اكتشاف الجواب : ولإثبات صحته عليه استعمال الجبر .

يمكنك أن تجد بنفسك السرعات المناظرة للصيغة  $v = s^2$  ، والسرعات المناظرة للصيغة  $v = s^4$  وهكذا مع  $v = s^6$  . بعد حساب  $v = s^2$  ،  $v = s^4$  سوف تلاحظ كيف أن النتائج بسيطة للغاية وهى بدورها تجعل نتائج  $v = s^6$  ،  $v = s^8$  أيضا بسيطة ، وتساعدك على اختزال العمل لاكتشاف القاعدة . إن إيجاد القاعدة بطريقة الفصل الثامن سوف يستغرق وقتاً طويلاً . وفى إمكانك أن تحسب بنفسك نتائج الحالات السابقة بدون النظر إلى النتائج المبينة أدناه . إنه

يفيد كثيراً أن يجد الفرد النتائج بنفسه بدون الرجوع إلى أى مرجع  
إذا نجحت في ذلك سوف تحصل على النتائج المبينة في الجدول الآتى

### جدول ١١

الصيغة التى تعطى المسافة	الصيغة التى تعطى السرعة
المقطوعة فى س ثانية	بعد س ثانية
ص = س <sup>٢</sup>	٢ س
ص = س <sup>٣</sup>	٣ س <sup>٢</sup>
ص = س <sup>٤</sup>	٤ س <sup>٣</sup>
ص = س <sup>٥</sup>	٥ س <sup>٤</sup>
ص = س <sup>٦</sup>	٦ س <sup>٥</sup>

ومن الواضح أنه يمكن الحصول على هذه النتائج بقاعدة بسيطة . عندها يكون لدينا س<sup>٢</sup> فى العمود الأول يكون هناك كمية تحوى س<sup>٢</sup> فى الثانى ؛ وقبالة س<sup>٤</sup> يوجد عدد معين مضروب فى س<sup>٢</sup> . فبقوة س فى العمود الثانى دائماً أقل بواحد عن الأول . يقابل س<sup>٢</sup> كمية تحوى س<sup>١</sup> وأسهل من ذلك القاعدة الخاصة بالعدد الذى يسبق س : إنه مثل العدد الموجود فى العدد الأول ، إنه ن ، بحيث إذا كانت الصيغة التى تعطى المسافة هى س<sup>٢</sup> فإن الصيغة التى تعطى السرعة هى س<sup>١</sup> .

لا حظ المجهود الذى بذل للحصول على النتيجة البسيطة :  
لإيجاد السرعة التى تناظر س<sup>٢</sup> كان علينا القيام بعمليات حسابية

طويلة ، وملاحظة أن الصيغة ٢ س تحقق النتائج. وكان علينا القيام بهذا العمل أيضاً مع س ٢ ، س ٤ ، س ٥ ، س ٦ . ثم بتجميع هذه الصيغ في جدول ١١ لاحظنا أنه يمكن أن نستنتج لها قاعدة واحدة عامة . وبمجرد إيجاد القاعدة العامة يمكن تطبيقها مباشرة على أية حالة أخرى فالصيغة ص = س ١٧ ينظرها السرعة ١٧ س ١٦ والسرعة المناظرة إلى س ٩٢ هي ٩٢ س ٩١ .

كثيراً ما نقابل في الميكانيكا والتطبيقات الأخرى صيغاً تحوى قوى مختلفة في س . فمثلاً إذا ألقينا كرة إلى أعلى بسرعة ٤٠ قدما في الثانية فإن إرتفاعها بعد س ثانية يساوى ٤٠ س - ١٦ س ٢ قدما ( لدينا هذا القانون في الفصل الثامن بصورة مختلفة اختلافاً بسيطاً فهي تعطى هناك الارتفاع بعد س أرباع الثانية ) . كيف يمكن الحصول على السرعة بعد س ثانية ؟

أحسن الطرق لمعالجة مثل هذه المسألة هي تفتيتها وبدورنا نعتبر الأجزاء المختلفة التي تتكون منها المسألة :

( ١ ) ما هو معدل ازدياد الحد ٤٠ س هي المسافة التي يقطعها الجسم في س ثانية إذا تحرك بسرعة ثابتة ٤٠ قدما في الثانية وعلى ذلك فواضح أن السرعة التي تناظر ٤٠ س هي ٤٠ .

( ٢ ) ما هو معدل ازدياد الحد ١٦ س ٢ ؟ يمكننا الحصول على جدول ١٦ س ٢ بضرب كل الأرقام في النصف الأخير من

جدول ٧ في ١٦ ، وبمعنى آخر إذا تحرك جسم طبقاً للصيغة ١٦ س<sup>٢</sup> فإنه يقطع بعد أى عدد من الثواني ١٦ ضعفاً للمسافة المقطوعة بالصيغة س<sup>٢</sup> . وبذلك يكون متحركاً في أية لحظة بسرعة تساوى ١٦ ضعفاً . وحيث إن السرعة التى تناظر س<sup>٢</sup> هى ٢ س فإن السرعة التى تناظر ١٦ س<sup>٢</sup> تكون أكبر ١٦ ضعفاً : أى ٣٢ س .

( ٣ ) الآن نعرف أن ٤٠ س تزداد باستمرار بمعدل ٤ ، بينما ١٦ س<sup>٢</sup> تزداد بمعدل ٣٢ س .

فبأى معدل تزداد ٤٠ س — ١٦ س<sup>٢</sup> كيف يمكن توحيد هذين المعدلين ؟

يمكن الحصول على ٤٠ س — ١٦ س<sup>٢</sup> بطرح ١٦ س<sup>٢</sup> من ٤٠ س . كيف يمكن تصوير عملية الطرح هذه ؟ يمكن أن نتخيل أن ٤٠ س ممثلة لدخل رجل في أى لحظة ، ١٦ س<sup>٢</sup> ممثلة لتكاليف إعالة أسرته . الدخل والمنصرف كلاهما متزايد . يمثل ٤٠ س — ١٦ س<sup>٢</sup> التوازن الأسبوعى الذى يحصل عليه الرجل بعد مراجعة مصاريفه . ومن الواضح أن هذا التوازن يتزايد بمعدل يساوى معدل ازدياد دخله ناقص معدل ازدياد مصاريفه ( إذا كان هذا التوازن متناقصاً فإن هذا المعدل يكون أقل من الصفر أى بإشارة سالبة ) . معدل ازدياد الدخل ٤٠ س ومعدل ازدياد المصاريف ٣٢ س

وبذلك يكون معدل ازدياد الفرق بينهما هو ٤٠ - ٣٢ س وهكذا  
يمكن توحيد المعدلين بطرح الثاني من الاول .

نصل بذلك إلى النتيجة الهامة : السرعة المناظرة إلى ٤٠ س -

١٦ س<sup>٢</sup> هي ٤٠ - ٣٢ س .

وسوف نرى أنه يمكن تطبيق ذات الطريقة على أية حالة من  
نفس النوع . فمثلا السرعة التي تناظر ٤ س<sup>٢</sup> + ٣ س + ١  
هي ١٢ س<sup>٢</sup> + ٢ س + ٣ ( لا يتغير العدد واحد بالمرة : تعنى  
ص = ١ أن الجسم موجود دائماً على بعد واحد من نقطة ثابتة .  
وبالطبع لا تكون له سرعة وبذلك فالعدد ١ الموجود في الصيغة  
السابقة لم يضاف أى شيء للجواب .

توصلنا للصيغة ٤ س<sup>٢</sup> + ٣ س + ١ إلى نفس السرعة .  
وهذا معقول جداً إذ أن ٤ س<sup>٢</sup> + ٣ س + ١ تنقص  
دائماً بواحد عن ٤ س<sup>٢</sup> + ٣ س + ١ . فالصيغة الأولى  
لا يمكن أن تسبق أو تختلف عن الثانية وعلى ذلك فطبعي جداً  
أن تكون السرعتان متساويتين . )

إذا واجهتك أية صعوبة بخصوص هذه الفكرة فاستنتج  
لنفسك السرعتين المناظرتين إلى ٥ س<sup>٢</sup>، ٢ س ثم إلى ٥ س<sup>٢</sup> + ٢ س .  
احسب السرعة المناظرة إلى ٢ س + ١ س - ٢ س، ١ س + ١ س،  
٢ س + ١ س + ١ س وأمثلة أخرى تكونها لنفسك . تحقق من



إجابتك بعمل جداول لهذه الصيغ ملاحظاً ما إذا كانت نتائجك  
عن السرعات مناسبة .

### رموز السرعة

إنه ليس من المناسب أن نستمر في القول « السرعة المناظرة  
للصيغة » : سوف نستعمل لذلك رمزا . فإذا كان لدينا أى  
صيغة تعطى ص فإن ص تعطى السرعة المناظرة ، وهذه تمكنتنا  
أن نذكر قاعدة سبق أن حصلنا عليها في الصورة المختصرة « إذا  
كانت ص = س ن فإن ص = ن س ن<sup>١</sup> »

وهذه تعنى تماماً نفس الشيء مثل قولنا إن الصيغة س ن تناظر  
السرعة ن س ن<sup>١</sup> وكما أننا نستعمل ص ( س ) لتمثل المسافة  
المناظرة إلى س فإن ص' ( س ) تمثل السرعة المناظرة إلى س .  
فمثلاً تعنى ص ( ٢ ) السرعة بعد ثانيتين .

ومن المناسب أحياناً أن نستعمل رمزاً آخر بدلا من ص' .  
من هذا الرمز الآخر هو :

و.ص.

و س

وهناك سبب لاستعمال هذا الرمز . فإن و هنا لها معنى خاص

جدا مثل  $\Delta$  المستعملة في الفصل الثامن . وفي الحقيقة أنه فقط بواسطة الرمز  $\Delta$  يمكنك هنا معرفة سبب استعمال  $\Delta$  .

أولا — ماهي السرعة ؟ إذا قيل لك إن قطاراً قطع مسافة ٣٠٠ ميلاً في أربع ساعات فأنت تعلم أن سرعته كانت في المتوسط ٧٥ ميلاً في الساعة . حصلنا على ٧٥ بقسمة ٣٠٠ على ٤ وإذا علمت أن قطاراً قد قطع ١٥٠ ميلاً حتى الساعة السابعة صباحاً ٢٧٠ ميلاً حتى الساعة العاشرة صباحاً. كيف يمكنك معرفة السرعة المتوسطة ما بين الساعة السابعة صباحاً والساعة العاشرة صباحاً ؟ أوجد الزمن الذي مر بين الساعة السابعة صباحاً والعاشرة صباحاً ثلاث ساعات . ثم أوجد المسافة المقطوعة ، ٢٨٠ — ١٦٠ = ١٢٠ اقسم ١٢٠ على ٣ تحصل على الجواب ٤٠ ميلاً في الساعة .

إذا سمينا الزمن س ساعة والمسافة المقطوعة ص ميلاً فإننا نحصل على جدول أكثر شبيهاً بجدول الفصل الثامن .

### جدول ١٢

	٣	$\Delta$ س
١٠	٧٠	س
٢٧٠	١٥٠	ص
١٢٠		$\Delta$ ص
٢٢٩		(١٥ — رياضة)

كما سبق لدينا قيم  $s$  في صف واحد وتحتها قيم  $v$  المناظرة ثم صفنا يعطى  $\Delta v$  ، التغير في  $v$  ، والظاهرة الوحيدة الجديدة هي الصف  $\Delta s$  الذي يعطى التغير في  $s$  . في الفصل الثامن كان التغير في  $s$  ما بين أى عدد والذي يليه دائماً واحد لذلك قد يكون مضيق للوقت وأيضاً من التعقيد أن يكون للتغير  $\Delta s$  صففاً . ولكن في إيجاد السرعات  $\Delta v$   $v$  لازمة حتماً . حصلنا على السرعة ٤٠ ميلاً في الساعة بقسم ١٢٠ على ٣ أى يقسمه  $\Delta v$  على  $\Delta s$  .

وعلى ذلك فالقاعدة لإيجاد السرعة المتوسطة هي أن تحسب التغير في المسافة مقسوماً على التغير في الزمن برموزنا :

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\Delta v}{\Delta s}$$

ولكن هذه تعطي فقط السرعة المتوسطة ونحن نبحث عن السرعة في أية لحظة . إذا صدمتك عربة بسرعة ٦٠ ميلاً في الساعة فإنه ليس معزياً لأرملتك أن تعلم أن متوسط سرعة العربة كانت فقط ١٠ أميال خلال الساعة الأخيرة ، وذلك لأن السائق كان قد أضع معظم هذه الساعة في حانة .

إن الذي يهم ليس السرعة المتوسطة خلال الساعة الأخيرة

لأنما المهم السرعة الحقيقية في تمام اللحظة التي صدمتك عندها  
العربية

ولكن السرعة عند لحظة التصادم لا تختلف كثيراً جداً  
عن السرعة المتوسطة خلال عشر الثانية السابق للتصادم، وربما  
قلت عن السرعة المتوسطة خلال واحد من الألف من الثانية  
السابقة، وبكلمات أخرى إذا أخذنا السرعة المتوسطة لفترات أصغر  
فأصغر من الزمن فإننا نقرب من السرعة الحقيقية لأي درجة  
تريد. ومن الناحية العملية يمكن اعتبار أن السرعة المتوسطة خلال  
واحد على ألف من الثانية مساوية للسرعة الحقيقية.

ولهذا السبب يرى علماء الرياضة أنه من المفيد أن يمثلوا  
السرعة برمز هشابه لرمز السرعة المتوسطة. يستعمل اليونانيون  
الرمز  $\Delta$  ليمثل الحرف D ولا يمكننا إتخاذ الرمز  $\frac{\Delta \text{ض}}{\Delta \text{س}}$  كما هو

ليمثل السرعة، لأن السرعة المتوسطة خلال فترة وجيزة ههما  
كانت قريبة من السرعة الحقيقية عند أية لحظة لا يمكن أن  
تكون هي نفسها بالضبط، إنه بما يؤدي إلى البلبلة أن يكون  
لدينا نفس الرمز لشيئين مختلفين.

ومحافظة على الفكرة القديمة التي تذكرنا كيف ساعدتنا  
فكرة السرعة المتوسطة تجاه الوصول إلى السرعة الحقيقية

نستبدل الحرف اليوناني  $\Delta$  بالعربي ونستعمل  $\frac{v}{s}$  كرمز  
يمكن استعماله بدلا من  $v$  ليمثل السرعة .

مرة أخرى جرت العادة في المسائل الميكانيكية أن تسمى  
السرعة باللفظ العلمي « السرعة المتجهة » ، وسوف نختصرها  
بالرمز  $v$  .

عملية إيجاد معدل تغير كمية يسمى بالتفاضل . إذا فاضلنا  $v$

فإننا نحصل على معدل تغيرها (أو سرعتها) ،  $v$  ،  $\frac{v}{s}$  ،  $v$  ،  
فإذا فاضلنا  $v$  نحصل على  $v$  .

يمكن تكرار هذه العملية . فعندما اعتبرنا  $v$  متدحرجاً أسفل  
تل تبعاً للصيغة  $v = s$  رأينا أن السرعة  $v$  تتزايد باستمرار  
ولربما يتسائل للفرد ، « ما هي السرعة التي تتزايد بها ؟ » ، ليس  
هناك صعوبة في إجابة هذا السؤال فقد رأينا بعد  $s$  ثانية نعطي  
السرعة  $v$  بالصيغة  $v = s$  وبذلك يكون لدينا صيغة بسيطة  
تعطي  $v$  ويكون من السهل إيجاد  $v$  . في الحقيقة  $v = s$  . فالسرعة  
تتزايد باستمرار . إنها تزيد  $v$  في كل ثانية تمر . ( تحقق من هذه  
النتيجة من قيم  $v$  المعطاه في جدول ١٠ ) .



وحيث أن ع هي نفس الشيء مثل ص فن الطبيعي أن تمثل ع بالرمز ص . وليس هناك شيئاً جديداً يحتويه الرمز ص . تمثل ص المعدل الذي به تتغير ص . تمثل ص المعدل الذي به تتغير ص . في الفصل الثامن وجدنا  $\Delta^2$  ص من  $\Delta$  ص بمجرد تكرار العملية التي سبق إجرائها لإيجاد  $\Delta$  ص من ص . إنه نفس الشيء هنا . نبدأ بقيمة ص ونسأل عن مقدار سرعة تزايدها . الجواب هو ص . والآن نبدأ مرة أخرى بجدول ( أو صيغة ) ص ونسأل عن مقدار سرعة تزايدها . ص . في كثير من الأحيان ص تشابه  $\Delta^2$  ص .

### أهمية ص ٦ ص

الكميتان ص ، ص لهما أهمية عظيمة في الميكانيكا ، فن الواضح أن ص ( وهي التي تعني السرعة أو السرعة المتجهة ) مهمة ، ص أكثر أهمية . تقيس ص مقدار السرعة التي تزايد بها السرعة . إذا كنت في عربة تقطع ٥٠ ميلاً في الساعة ثم أوقف السائق العربة بالتدريج خلال ١٠ دقائق مثلاً فإنك لا تشعر تقريباً بأي شيء . ولسكن إذا أوقفت العربة في جزء من المائة من الثانية ، بالتصادم مع حائط ، فسوف تشعر بصدمة ذات قوة هائلة كافية لإحداث أضرار جسيمة . إنه لا يحدث ضرراً إذا

سافرت بسرعة كبيرة مثل ٥٠ ميلا في الساعة . إنما الذى يؤذى هو التغير المفاجئ فى السرعة .

وعادة عندما تتغير سرعتنا نشعر بضغط . فإذا كنت فى عربة أوقفت فجأة فإنك تشعر بأنك دفعت للأمام . وحقيقة الأمر أنك تستمر فى الحركة بنفس السرعة ولكن تتوقف العربة . إنك تقف فقط عندما تصطدم بالمقعد الذى أمامك : إنك تشعر بأنه يدفعك للخلف . وبنفس الطريقة لا يمكن أن نوقف عجلة مالم يكن بها فرامل ( أو يكون هناك ريح شديد فى اتجاه مضاد لاتجاه العجلة أو تكون صاعداً بالعجلة جبلاً أو تكون العجلة مشحمة تشحيماً رديئاً ، تقوم أية حالة من هذه الحالات بمقام الفرامل ) .

يفسر هذه الظاهرة قانون نيوتن الثالث للحركة . فيحسب قانون نيوتن إذا تمكن جسم من التخلص من جميع المؤثرات الخارجية بأن يكون بعيداً عن جذب الأرض أو الشمس ، بعيداً عن القوى المغناطيسية والكهربائية ولم يكن فى حالة ضغط أو جذب بأى جسم آخر ، فإنه يستمر فى حركته فى خط مستقيم بسرعة ثابتة . ويمكن للفرد أن يرى بالمنظار المكبر جزئيات المادة الصغيرة كالمدنبات مثلاً . وقد لوحظ أنه كلما زاد بعدها عن الأرض أو الشمس كلما تحركت تقريباً فى خط مستقيم وبسرعة ثابتة .

عندما نجد جسماً يتحرك في مسار منحني أو بسرعة متغيرة فإننا نعتقد حينئذ أن هناك شيئاً آخرأ مؤثراً عليه . فنقول إن هناك قوة تؤثر عليه ونحاول أن نكتشف ماهية هذه القوة . هل الجسم مقيد بحبل أو بخيط ؟ هل هو ملتصق مع جسم آخر ؟ هل هو تحت تأثير جذب الأرض أو الشمس أو ( في حالة المد والجزر ) القمر ؟ هل به مغناطيسية ؟ هل الجسم مشحون بالكهرباء ؟ أو منزلق على سطح خشن يعمل على إيقاف حركته ؟ هل يتحرك في سائل مثل الماء يعوق حركته ؟ هل يخترق الهواء مثل مظلات الهبوط أو ريشة ساقطة ؟

بعد ذلك نتساءل كيف يمكن قياس القوى : إنه من الواضح أن القوة اللازمة لتغيير سرعة جسم تتوقف على مقدار كتلة الجسم . من السهل أن توقف عربة أطفال متحركة ، وأصعب من ذلك أن توقف عربة قطار منطلقة ، ومن الصعب جداً أن توقف مجموعة من عربات النقل المحملة ، وتقريباً من المستحيل أن توقف هيار الثلج . لذلك يستعمل العلماء كلمة « كتلة » لتعبر عن خاصية الجسم التي من هذا النوع . وقد اختير السنتيمتر المكعب من الماء كوحدة الكتلة وسمى بالجرام . أى شيء يمكن إيقاف أو استمرار حركته بنفس السهولة التي نلاقيها مع سنتيمتر مكعب من الماء يقال إن له كتلة جرام واحد . وأى شيء يكون من الصعب إيقاف حركته بنفس

الصعوبة التي نلاقها مع ١٠٠٠ سنتيمتر مكعب من الماء يقال إن كتلته ١٠٠٠ جرام .

وهكذا سوف نقول باختصار إن كتلة الجسم ك جرام .  
قد وجد أن ك ص " هي القوة التي تغير سرعة جسم ( كتلته ك جرام )  
بمعدل ص " . وعندما تزداد سرعة الجسم بتزايد ص يندفع الجسم  
بقوة إلى الأمام . وعندما تنقص سرعة الجسم تكون ص " سالبة . وهذا  
يعنى أن القوة تؤدي عمل الفرامل . إنها تعمل على إيقاف  
حركته .

من المعتاد في الدراسة العملية قياس المسافة ص ، لا بالأقدام  
أو البوصات إنما بالسنتيمترات . وباستعمال النظام المترى  
للقياسات توفر كل التعقيدات الناتجة من أن هناك ١٢ بوصة في  
القدم ، ٣ أقدام في الياردة ، ٢٢ ياردة في السلسلة ،  $30\frac{1}{4}$  ياردة  
مربعة في العمود الواحد وهكذا . إننا تسلمنا النظام الإنجليزى  
للقياس من قديم الزمان قبل التفكير في العلوم الهندسية الحديثة  
بفترة طويلة . إنه أثر متعلق بأشياء مثل مساحة الأرض التي يمكن  
لمجموعة من الثيران أن تحرثها في اليوم ( الفرسخ = طول أخذود )  
أو المقياس المتوسط لجزء من جسم الإنسان ( قدم ) . كانت أمثال  
هذه القياسات مناسبة لأغراضهم الأصلية . أما من الناحية  
الأخرى فقد أدخل النظام الفرنسى في أثناء الثورة الفرنسية سنة



١٧٨٩ وكان مصمماً خصيصاً للتجارة والصناعة الحديثة . وترجع أية صعوبة تقابلنا عند تحويل أقدام وأطنان إلى سنتيمترات وجرامات إلى تاريخ البشرية : إنها ليست مشاكل علمية بحثة . وأيضاً يستعمل المهندسون الإنجليز نظاماً للقياس فيه وحدة الكتلة وزن رطل وتقاس المسافة ص بالأقدام . وتكون القوة المناظرة إلى ك رطل وعجلة ص " ( مقاسة بالأقدام والثواني ) هي ك ص " باوندال .

سبق أن اعتبرنا الصيغة ص = ٤٠ س - ١٦ س<sup>٢</sup> التي تعطى بالأقدام ارتفاع جسم بعد ن ثانية من قذفه لأعلى بسرعة ٤٠ قدماً في الثانية . ما هي القوى المؤثرة على هذا الجسم ؟  
ص = ٤٠ - ٣٢ س حيث ص = ٣٢ .

إذا كانت كتلة الجسم ك باوند فإن القوة المؤثرة عليه تكون ك ص " وهذه تساوى : ٣٢ ك . هذه القوة لا تتوقف على س . إنها لا تتغير بتغير س . إن مقدار القوة يساوى ٣٢ ك : تكون الإشارة التي تسبقها سالبة لأن الأرض كما نعرف تجذب الجسم إلى أسفل . وفي حالة ما إذا كان الجسم آخذاً في الارتفاع ( مثل البالون ) تكون هذه القوة موجبة .

لقد وجد بالتجربة أنه إذا قذف أى جسم ثقيل في الهواء



فإنه يتحرك بحيث تكون ص" = ٣٢ - ولنفرض أن الجسم ثقيل لدرجة أنه يمكن إهمال مقاومة الهواء . ومن الواضح أن هذا القانون لا ينطبق على ريشة أو مظلة هبوط . فظلة الهبوط تسقط بطريقة تختلف تماماً عن الطريقة التي يسقط بها الحجر الثقيل . يعطى القانون السابق ذكره نتائج مناسبة مع حجر ساقط أو كرة كريكت ، أو جسم ثقيل . لكن لا يمكن تطبيقه على ريشة ، أو قطرات المطر أو الفئران . وأيضاً لا يمكن تطبيقه على السرعات الكبيرة جداً . ففي حركة قذيفة أو رصاصة ربما تكون القوة الناتجة من مقاومة الهواء أكثر بكثير من قوة الجاذبية .

إن العدد ٣٢ بالطبع ليس صحيحاً . إن الأرض لا يهملها أن تجذبنا نحوها بقوة هي مضاعف بسيط لطول أقدامنا ١ ولكن ٣٢ قريبة جداً لمعظم الأغراض .

حيث إن جذب الأرض يجعل قيمة ص" = ٣٢ تكون قوة الأرض المؤثرة على كتلة ك باوند هي ٣٢ باونداً (يحصل عليها بوضع ص" = ٣٢ في ك ص" ) . تعني الإشارة السابقة أن هذه القوة تعمل إلى أسفل .

## موضوعات أخرى مفيدة (\*)

لقد نظرنا إلى الآن في حالة خاصة جداً وهي حالة جسم متحرك في خط مستقيم وتحت تأثير قوة واحدة فقط .

وفي أغلب الدراسات العلمية تكون المسألة أكثر تعقيداً . فالمصعد يتحرك إلى أعلى وإلى أسفل في خط مستقيم ولكن تحت تأثير قوتين هامتين : جذب الأرض إلى أسفل وشد الحبل الرافع إلى أعلى . ربما نحتاج أيضاً أن نأخذ في الاعتبار أي تدبير لمنع المصعد من التصادم بجدران عمود الرفع ، الاحتكاك ، مقاومة الهواء ... إلخ . وحتى لو أهملنا ذلك فإنه لا يزال لدينا قوتان للاعتبار . في الأمثلة الأخرى سنضطر إلى اعتبار الأجسام التي لا تتحرك في خطوط مستقيمة : قطار أو عربة متحركة على منحني ، قذيفة في الهواء ، قطعة معدن في عجلة دوارة .

يختص علم الاستاتيكا بالتأثير الناتج من مجموعة من القوى .

---

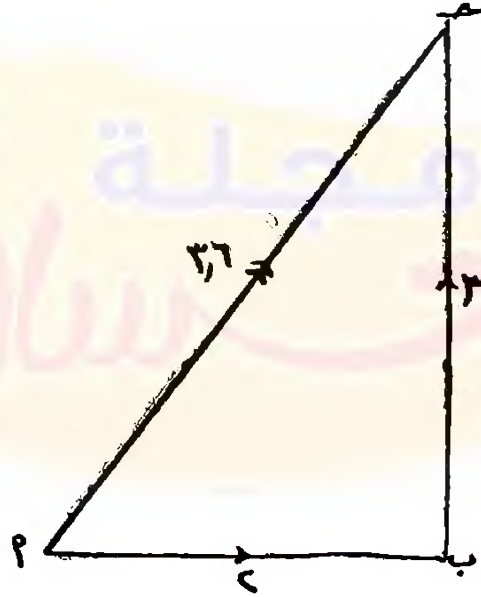
(\*) بقية هذا الفصل تحتوي على تطبيقات ربما تفيد بعض القراء ولكنها ليست ضرورية لفهم بقية الكتاب . وسوف يشار إلى هذا القسم في الفصل الثالث عشر .

ويجب اكتشاف قانونها أولاً بالتجربة . ثم بعد ذلك يمكن استعماله .

إذا أثرت عدة قوى في اتجاه واحد تكون النتيجة كما نتوقعها .  
إذا شد شخصان مركبة للثلج كل ساحباً بقوة ١٠٠٠ باوندال فإن  
التأثير الناتج يكون مثل تأثير قوة جذب واحدة مقدارها ٢٠٠٠  
باوندال : لقد جمعنا القوى المختلفة على بعضها .

إذا أثرت قوتان في اتجاهين مختلفين . فإنه يمكن بسهولة  
حساب التأثير الناتج . إذا وزن مصعد ٢٥٠٠ رطل فإن الأرض  
تجذبه لأسفل بقوة  $32 \times 2500$  باوندال — أى ٨٠٠٠٠  
باوندال . وإذا جذب الحبل المصعد لأعلى بقوة ١٠٠٠٠٠  
باوندال فإن المصعد يكون تحت تأثير قوتين ، ٨٠٠٠٠ باوندال  
إلى أسفل . إن التأثير الناتج من هاتين القوتين يكون مثل تأثير  
قوة مقدارها ٢٠٠٠٠ باوندال ( يحصل عليها بطرح ٨٠٠٠٠ من  
١٠٠٠٠٠ ) تؤثر لأعلى . ويجب ملاحظة أن الحبل يجب أن يحتمل  
شداً أكبر من وزن المصعد . ذلك لأنه فقط عندما يكون شد  
الحبل إلى أعلى أكبر من جذب الأرض إلى أسفل تكون القوة  
المحصلة إلى أعلى . ويجب أن تكون القوة المحصلة إلى أعلى حتى  
تهب المصعد حركة إلى أعلى ( وبنفس الأهمية ) ، أن تكون  
كذلك عند نهاية حركته إلى أسفل .

فى منجم للفحم ، يرفع المصعد العمال وينزلهم خلال مئات  
الباردات فى فترة وجيزة من الزمن يحصل فيها تغييرات كبيرة  
فى السرعة وإنها لمسألة فى غاية الأهمية أن يكون الحبل متيناً .  
ليس فقط لاحتفال وزن القفص والعمال الذين بداخله ولكن  
أيضاً لىكى يحتفل الجهد الزائد لبدء الحركة وإيقافها . ( يمكن  
إجراء ذلك بمصاعد نموذجية مستعملة خيوط قطنية بدلاً من الحبل  
لىكى تبرهن على تأثير الشد المفاجئ ) .



مثلث القوى

يجب أن ندرس مبدأ جديداً لىكى نعالج القوى التى لا تعمل  
فى إتجاه واحد . لنفرض أن لدينا قوة مقدارها ٢ باوندال تؤثر  
شرقاً وقوة مقدارها ٣ باوندال تؤثر شمالاً : ما هى القوة المكافئة  
لذلك ؟ من المستحيل حل ذلك بالكلام :

إنه يمكننا فقط أن نحاول أن نرى ماذا يحدث لجسم صغير عندما نجذبه شرقاً بخيط يتصل به ونحو الشمال بخيط آخر (لتفاصيل التجربة يمكنك الاطلاع على كتب الإستاتيكا) إن القارئ يمكنه أن يرى النتيجة المحتملة ، سوف يتحرك الجسم في اتجاه ما بين الشمال والشرق . تبين التجارب أن الطريقة الآتية تعطى الحل الصحيح . ارسم خطاً طوله ٢ بوصة نحو الشرق . سمى هذا الخط ١ ب . من النهاية الشرقية لهذا الخط (ب) ارسم ب ح طوله ٣ بوصة نحو الشمال . لقد رسم الخط ١ ب بطول يساوى ٢ بوصة ليمثل قوة مقدارها ٢ باوندال ورسم الخط ب ح بطول مقداره ٣ بوصة لينظر القوة التي مقدارها ٣ باوندال . فإذا قسنا ١ ح نجد أن طوله ٣٫٦ بوصة . يعطى طول واتجاه ١ ح جواباً للسؤال .

إن القوتين ٢ باوندال نحو الشرق ، ٣ باوندال نحو الشمال مجتمعتين يجذبان الجسم في اتجاه ١ ح بقوة تساوى ٣٫٦ باوندال . لسبب واضح يعرف هذا المبدأ بثلاث القوى . في المثلث ١ ب ح يمثل الضلعان ١ ب ، ب ح القوتين المعطائين . يمثل الضلع الثالث ١ ح القوة الناتجة من تأثير هاتين القوتين مجتمعتين .

في المقلع العادى نثبت قطعتان من المطاط في قطعة صغيرة



من القماش وعند انطلاق المقلع تنحرك قطعة القماش الصغيرة  
في اتجاه يقع بين إتجاهي قطعتي المطاط .

### الهندسة المستوية

عند معالجة المنحنيات استعملنا فكرة تعيين موضع نقطة  
بقياس بعدها عبر الورقة « شرقاً » وبعدها « شمالاً » . يمكن  
استعمال نفس الفكرة عند دراسة حركة أى ثقل صغير عندما  
يتحرك على منحنيين . نفرض أنه بعدس ثانية كان الثقل الصغير على بعد  
ص قدم شرقاً ، ع قدم شمالاً من نقطة ثابتة . وربما يكون هذا الثقل  
الصغير جزء من آلة . إن القاعدة التي تعطى ص ، ع بدلالة س تتوقف  
على الطريقة التي تتركب بها الآلة . فمثلاً ربما يكون النقل جزءاً  
من آلة بخارية . فإذا علمنا شكل قضبان السكك الحديدية والسرعة  
التي يسير بها القطار لعرفنا وضع كل جزء من الآلة البخارية عند  
أى زمن . بمعنى آخر نعرف القيم التي تأخذها ص ، ع بعد  
س ثانية .

إذا لم تؤثر أية قوة على الجسم ، يتحرك الجسم في خط  
مستقيم . فعندما تنحرك آلة بخارية حول منحنى فإنها لا تنحرك  
في خط مستقيم ولا أى جزء من الآلة البخارية يتحرك في خط  
مستقيم . وعلى ذلك لابد من وجود قوى تؤثر على كل جزء من

الآلة البخارية . وسوف نلاحظ دائماً أنه عند مرور آلة بخارية على منحني أنها تضغط على القضيب الخارجى تماماً كالسيارة التى تسير حول منحني بسرعة كبيرة فإنها تميل إلى السير على الحافة الخارجية للطريق . إذا لم يكن الطريق معداً إعداد ملائماً . وتضغط القضبان على العجلات وتجعلها تدور حول المنحنى . بدلا من السير فى خط مستقيم . فهل من الممكن معرفة مقدار القوة المؤثرة على أى جزء من الآلة البخارية ؟ إنه من الممكن ولو أنه ليس من السهل وصف الطريقة بكلمات قليلة .

ولنبداً قبل كل شيء بما يجنبنا التعقيد بأن نفترض بأن الآلة البخارية بكافة أجزائها لا تتحرك إلى أعلى أو إلى أسفل . بحيث أنها تبقى دائماً على نفس الارتفاع يمكن وصف حركتها وصفاً كاملاً بواسطة جدول يبين مقدار بعدها شرق نقطة الأصل ومقدار بعدها شمال و . وعلى ذلك فأول شيء نفعله هو اكتشاف صيغ أو عمل جداول تعطى ص ، ع المناظرة إلى أى زمن س ثانية . ولنفرض أنه قد أكمل هذا الجزء من العمل .

سوف يكون سهلاً للغاية أن ندرس حركة آلة بخارية (أو أى جزء صغير منها) متجهة نحو الشرق ، إذا لم يكن هناك حركة اتجاه الشمال . تكون الآلة البخارية حينئذ متجهة نحو الشرق فى خط مستقيم . وبعد س ثانية تعطى ص بعدها شرقاً

وتكون القوة التي تدفع أى جزء صغير (كتلته ك باوند مثلاً) نحو الشرق ( بالطريقة السابقة ) هى ك ص' .

ومن السهل أيضاً أن نحصل على الجواب إذا كانت الآلة البخارية متحركة نحو الشمال . إذ بنفس الطريقة تكون القوة التي تدفع أى جزء صغير تجاه الشمال هى ك ع' .

وهنا تسعفنا الطبيعة بالحل فنكشف حقيقة أن الحركة تجاه الشرق والحركة تجاه الشمال يمكن معاماتهما كأنهما منفصلتان ولم يكن لدينا سبب أولى يجعلنا نتوقع هذه النتيجة .

نحصل على القوة الحقيقية التي تدفع الجزء الصغير بتحصيل ( باستعمال مثلث القوى ) القوة ك ص' شرقاً مجتمعة مع القوة ك ع' شمالاً .

وبذلك يمكننا حل المسألة حلاً كاملاً . ليس هناك أية صعوبة جوهرية إذا اعتبرنا الحركة إلى أعلى وإلى أسفل تماماً كما اعتبرناها للشرق والشمال . إن القوى الناتجة من حركة أجزاء الآلة البخارية إلى أعلى وإلى أسفل مهمة للغاية . فإن الآلات البخارية القديمة كانت إذا سارت بسرعة كبيرة ترتفع في الهواء .

يتحدث كيمب Kempe عن التصميم الحديث للآلات البخارية فى كتابه السنوى للمهندسين فيقول : د القوى الأفقية هى الأكثر

ضرراً ، ولو أن المهندسين الأمريكيين يعتبرون أن القوى الرأسية هي الأكثر ضرراً ولكن الخبرة الإنجليزية تأخذ طريقاً وسطاً بين القوى الرأسية والأفقية الزائدة ، .

حساب القوى الذى تعرضنا له فى حديثنا عن الأثقال المتحركة مسألة عملية فى تصميم وتوازن الآلات . ولا يتسع المقام هنا أن نشرح الطريقة بوجه مرضى ، ولكن من الممكن تحديد الطريقة ولو بصورة غير واضحة وفى كلمات قليلة حتى نبين أن النظريات المستعملة قليلة وبسيطة .

### مقدمة

يبدوا لك علم الإستاتيكا والديناميكا كأنهما غير حقيقيين إذا لم يكن لديك خبرة بالأوزان الثقيلة . يمكنك أن تتعلم علم الديناميكا فى أوقات فراغك بتحريك أو إيقاف عربة سكة حديدية ثقيلة (لكن مشحمة جيداً) أو زحافة المزارع أكثر مما تتعلمه من كتب الميكانيكا . يمكنك الاستفادة من قراءة كتاب فى الديناميكا فقط إذا أمكن لكلمات مثل « القوة » أن تظهر بصورة براءة فى مخيلتك . وعندما يكون لديك الشعور اللازم للموضوع يمكن للكتب أن تكون فى غاية الأهمية بل ، ومسلية ولكن ليس قبل ذلك .

لا يحتاج حساب التفاضل إلى نفس الخبرة العملية فكل واحد تقريباً يعرف ما هي السرعة إنما المهم في الموضوع هو دراسة مجموعة من الأشكال حتى تتحقق من نوع الحركة التي تمثلها . ولأخذ أية صيغة . كون لها جدولاً مبيناً المسافة المقطوعة بعد فترات مختلفة . فإذا لم تتمكن من معرفة السرعة المضبوطة إبدأ بالتساؤل . ربما كانت الأسئلة البسيطة هي أحسن ما نبدأ به . هل السرعة مليون ميل في الساعة ؟ أو بوصة كل قرن ؟ أو تقع بين الإثنين ؟ حسناً فإننا نعرف الآن شيئاً عن السرعة . إبدأ بادخال النهايات ولاحظ كيف يمكن جعلها متقاربة . أدرس طرقك الخاصة في التفكير . كيف علمت أن السرعة أقل من مليون ميل في الساعة ؟ ما هو الدليل من جدولك الذي يؤيد وجهة نظرك ؟ ما هي ، في الحقيقة ، الطريقة التي تتبعها لتقدير السرعة ؟ هل يمكن تطبيق هذه الطريقة للحصول على تقديرات أدق ؟

أنت تعرف ما هي السرعة . فلا تصدق رجلاً يدعى أنه قطع ٥ أميال في الساعة ولكن تصدق إذا قضى ثلاث ساعات ليقطع ٦ أميال . عليك فقط أن تطبق نفس الطريقة على الأحجار التي تندحرج أسفل سفح جبل ، وستجد أن حساب التفاضل رهن إشارتك .



## أمثلة

لقد أوصى القارىء ألا يحاول أن يناقش أية مسألة قبل أن يكون لديه صورة كاملة واضحة عنها في مخيلته . ويكون قد أوجد طريقة ما لإبراز أن المسألة متصلة بالحياة العملية . حتى يتمكن من أن يرى ويلبس المعانى التى تنطق بها . هذا أمر مهم بوجه خاص عند دراسة السرعات التى ليست بالمرّة شيئاً بسيطاً كما كنا نظن أولاً . وعلى القارىء أن يجد لنفسه طريقة ما يتمكن بواسطتها من ملاحظة الحركة . ربما يكون ذلك قليلاً متدحرجاً أسفل غطاء درج أو عجلة أسفل سفح جبل أو ثقلاً معلقاً بخيط . هناك نصيحة خاصة يمكن ذكرها على نمط الصور السينمائية المتحركة . معظم أطفال المدارس معتادون على طريقة رسم الصور على صفحات كتاب بحيث أنه إذا سمحنا لهذه الصفحات أن تتساقط فى تتابع سريع فإن الأشكال تبدو متحركة . ونفس هذه الفكرة يمكن استعمالها لدراسة حركة نقطة . فمن ميزتها أنها تمكن الفرد من دراسة الحركة « مجمدة » بملاحظة مواضع النقطة على صفحات الكتاب المختلفة كما لو كانت فى حركة . فى السؤالين ١ ، ٢ افترض أن الصفحات تتساقط بمعدل عشر صفحات فى الثانية .

١ - ضع على الصفحة الأولى من الكتاب نقطة على بعد ١٠ بوصة من آخر الصفحة وعلى الثانية على بعد ٢٠ بوصة من البوصة. وهكذا النقطة في التي الصفحة النونية تكون على بعد  $\frac{n}{3}$  بوصة إلى أعلى الصفحة. وهذه تبين الحركة التي فيها  $v = s$  (ص بالبوصات، س بالثواني). ويبين موضع النقطة على أية صفحة حركتها بسرعة ثابتة إذ أنها دائماً ١٠ بوصة من البوصة أعلى من موضعها في الصفحة السابقة

٢ - ضع على الصفحة النونية نقطة على ارتفاع  $\frac{n}{3}$  بوصة. هذه تبين الحركة التي فيها  $v = s^2$  التي ناقشناها في هذا الفصل. لاحظ كيف تتحرك النقطة ببطء في نصف الثانية الأولى (خمس صفحات) وكيف تزداد سرعتها بمرور الزمن.

٣ - يتحرك جسم تبعاً للقانون  $v = s$ . كون جدولاً لحركته واثبت لنفسك: (١) أنه يتحرك بسرعة ثابتة. (٢) أن هذه السرعة هي الوحدة. في الحقيقة عندما  $v = s$  فإن  $v = 1$

٤ - بالمثل بين أنه عندما  $v = s^2$ ،  $v = 2$ .

٥ - وعندما  $v = s^3$ ،  $v = \frac{8}{27}$ .

٦ - عندما  $v = s + 1$ ،  $v = 1$ .

٧ - وعندما ص = ص + ٢ ، ص = ١ .

٨ - عندما ص =  $\frac{2}{3}$  س + ١ ، ص =  $\frac{2}{3}$  .

٩ - وعندما ص =  $\frac{2}{3}$  س + ٢ ، ص =  $\frac{2}{3}$  .

١٠- يطارد كلب قطة . تتحرك القطة على حسب القانون

ص = ٣٠ س + ٢ ، والكلب على حسب القانون ص = ٣ س

هل صحيح أن (١) كلاهما متحرك بسرعة ٣٠ قدماً في

الثانية ؛ (ب) وأن السكب دائماً خلف القطة بـ ٢ قدمين ،

(ج) وأن ص = ٢٠ لكنا الحالتين .

١١- إذا تحركت القطة على حسب القانون ص = ٢٠ س + ١٠

والسكب على حسب القانون ص = ٢٥ س هل صحيح

(١) أن السكب يبدأ حركته بعشر أقدام خلف القطة ؟

(ب) أن السكب يتحرك أسرع من القطة (ج) أن السكب

سوف يلحق بالقطة خلال فترة وجيزة ؟ ما قيمة ص

للقطة ؟ ما قيمة ذلك بالنسبة السكب ؟ ومتى يسبق

الكلب القطة ؟

١٢- أكتب ص للحالات الآتية :

(١) ص = ٢ س . (ب) ص = ٢ س

(ج) ص = ٢ س + ١ . (د) ص =  $\frac{1}{2}$  س .

(هـ) ص = س . (و) ص = س + س = ص .

$$(ز) ص = س + ۱ + (ح) ص = \frac{۱}{۲} س - ۱$$

(ط) ص = س - س<sup>۲</sup> . (ی) ص = ۱ - س<sup>۲</sup>

(ك) صر = س<sup>۲</sup> . (ل) صر = ۲ ص<sup>۲</sup> .

(م) ص ۲ = س ۲ + س . (ن) ص ۲ = س ۲ + ۱ .

(ع) ص = ۱۰س<sup>۲</sup> - ۲۰س<sup>۲</sup> + ۷س - ۳ .

۱۳۔ رأینا أنه عندما ص==س<sup>۲</sup> تكون ص=س<sup>۲</sup>، ص="=۲.

کون جداول مبینا ص، ص، ص، "، Δ ص، Δ ص و عندما

س = ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۲۲، ۲۴، ۲۶، ۲۸، ۳۰، ۳۲، ۳۴، ۳۶، ۳۸، ۴۰، ۴۲، ۴۴، ۴۶، ۴۸، ۵۰، ۵۲، ۵۴، ۵۶، ۵۸، ۶۰، ۶۲، ۶۴، ۶۶، ۶۸، ۷۰، ۷۲، ۷۴، ۷۶، ۷۸، ۸۰، ۸۲، ۸۴، ۸۶، ۸۸، ۹۰، ۹۲، ۹۴، ۹۶، ۹۸، ۱۰۰، ۱۰۲، ۱۰۴، ۱۰۶، ۱۰۸، ۱۱۰، ۱۱۲، ۱۱۴، ۱۱۶، ۱۱۸، ۱۲۰، ۱۲۲، ۱۲۴، ۱۲۶، ۱۲۸، ۱۳۰، ۱۳۲، ۱۳۴، ۱۳۶، ۱۳۸، ۱۴۰، ۱۴۲، ۱۴۴، ۱۴۶، ۱۴۸، ۱۵۰، ۱۵۲، ۱۵۴، ۱۵۶، ۱۵۸، ۱۶۰، ۱۶۲، ۱۶۴، ۱۶۶، ۱۶۸، ۱۷۰، ۱۷۲، ۱۷۴، ۱۷۶، ۱۷۸، ۱۸۰، ۱۸۲، ۱۸۴، ۱۸۶، ۱۸۸، ۱۹۰، ۱۹۲، ۱۹۴، ۱۹۶، ۱۹۸، ۲۰۰، ۲۰۲، ۲۰۴، ۲۰۶، ۲۰۸، ۲۱۰، ۲۱۲، ۲۱۴، ۲۱۶، ۲۱۸، ۲۲۰، ۲۲۲، ۲۲۴، ۲۲۶، ۲۲۸، ۲۳۰، ۲۳۲، ۲۳۴، ۲۳۶، ۲۳۸، ۲۴۰، ۲۴۲، ۲۴۴، ۲۴۶، ۲۴۸، ۲۵۰، ۲۵۲، ۲۵۴، ۲۵۶، ۲۵۸، ۲۶۰، ۲۶۲، ۲۶۴، ۲۶۶، ۲۶۸، ۲۷۰، ۲۷۲، ۲۷۴، ۲۷۶، ۲۷۸، ۲۸۰، ۲۸۲، ۲۸۴، ۲۸۶، ۲۸۸، ۲۹۰، ۲۹۲، ۲۹۴، ۲۹۶، ۲۹۸، ۳۰۰، ۳۰۲، ۳۰۴، ۳۰۶، ۳۰۸، ۳۱۰، ۳۱۲، ۳۱۴، ۳۱۶، ۳۱۸، ۳۲۰، ۳۲۲، ۳۲۴، ۳۲۶، ۳۲۸، ۳۳۰، ۳۳۲، ۳۳۴، ۳۳۶، ۳۳۸، ۳۴۰، ۳۴۲، ۳۴۴، ۳۴۶، ۳۴۸، ۳۵۰، ۳۵۲، ۳۵۴، ۳۵۶، ۳۵۸، ۳۶۰، ۳۶۲، ۳۶۴، ۳۶۶، ۳۶۸، ۳۷۰، ۳۷۲، ۳۷۴، ۳۷۶، ۳۷۸، ۳۸۰، ۳۸۲، ۳۸۴، ۳۸۶، ۳۸۸، ۳۹۰، ۳۹۲، ۳۹۴، ۳۹۶، ۳۹۸، ۴۰۰، ۴۰۲، ۴۰۴، ۴۰۶، ۴۰۸، ۴۱۰، ۴۱۲، ۴۱۴، ۴۱۶، ۴۱۸، ۴۲۰، ۴۲۲، ۴۲۴، ۴۲۶، ۴۲۸، ۴۳۰، ۴۳۲، ۴۳۴، ۴۳۶، ۴۳۸، ۴۴۰، ۴۴۲، ۴۴۴، ۴۴۶، ۴۴۸، ۴۵۰، ۴۵۲، ۴۵۴، ۴۵۶، ۴۵۸، ۴۶۰، ۴۶۲، ۴۶۴، ۴۶۶، ۴۶۸، ۴۷۰، ۴۷۲، ۴۷۴، ۴۷۶، ۴۷۸، ۴۸۰، ۴۸۲، ۴۸۴، ۴۸۶، ۴۸۸، ۴۹۰، ۴۹۲، ۴۹۴، ۴۹۶، ۴۹۸، ۵۰۰، ۵۰۲، ۵۰۴، ۵۰۶، ۵۰۸، ۵۱۰، ۵۱۲، ۵۱۴، ۵۱۶، ۵۱۸، ۵۲۰، ۵۲۲، ۵۲۴، ۵۲۶، ۵۲۸، ۵۳۰، ۵۳۲، ۵۳۴، ۵۳۶، ۵۳۸، ۵۴۰، ۵۴۲، ۵۴۴، ۵۴۶، ۵۴۸، ۵۵۰، ۵۵۲، ۵۵۴، ۵۵۶، ۵۵۸، ۵۶۰، ۵۶۲، ۵۶۴، ۵۶۶، ۵۶۸، ۵۷۰، ۵۷۲، ۵۷۴، ۵۷۶، ۵۷۸، ۵۸۰، ۵۸۲، ۵۸۴، ۵۸۶، ۵۸۸، ۵۹۰، ۵۹۲، ۵۹۴، ۵۹۶، ۵۹۸، ۶۰۰، ۶۰۲، ۶۰۴، ۶۰۶، ۶۰۸، ۶۱۰، ۶۱۲، ۶۱۴، ۶۱۶، ۶۱۸، ۶۲۰، ۶۲۲، ۶۲۴، ۶۲۶، ۶۲۸، ۶۳۰، ۶۳۲، ۶۳۴، ۶۳۶، ۶۳۸، ۶۴۰، ۶۴۲، ۶۴۴، ۶۴۶، ۶۴۸، ۶۵۰، ۶۵۲، ۶۵۴، ۶۵۶، ۶۵۸، ۶۶۰، ۶۶۲، ۶۶۴، ۶۶۶، ۶۶۸، ۶۷۰، ۶۷۲، ۶۷۴، ۶۷۶، ۶۷۸، ۶۸۰، ۶۸۲، ۶۸۴، ۶۸۶، ۶۸۸، ۶۹۰، ۶۹۲، ۶۹۴، ۶۹۶، ۶۹۸، ۷۰۰، ۷۰۲، ۷۰۴، ۷۰۶، ۷۰۸، ۷۱۰، ۷۱۲، ۷۱۴، ۷۱۶، ۷۱۸، ۷۲۰، ۷۲۲، ۷۲۴، ۷۲۶، ۷۲۸، ۷۳۰، ۷۳۲، ۷۳۴، ۷۳۶، ۷۳۸، ۷۴۰، ۷۴۲، ۷۴۴، ۷۴۶، ۷۴۸، ۷۵۰، ۷۵۲، ۷۵۴، ۷۵۶، ۷۵۸، ۷۶۰، ۷۶۲، ۷۶۴، ۷۶۶، ۷۶۸، ۷۷۰، ۷۷۲، ۷۷۴، ۷۷۶، ۷۷۸، ۷۸۰، ۷۸۲، ۷۸۴، ۷۸۶، ۷۸۸، ۷۹۰، ۷۹۲، ۷۹۴، ۷۹۶، ۷۹۸، ۸۰۰، ۸۰۲، ۸۰۴، ۸۰۶، ۸۰۸، ۸۱۰، ۸۱۲، ۸۱۴، ۸۱۶، ۸۱۸، ۸۲۰، ۸۲۲، ۸۲۴، ۸۲۶، ۸۲۸، ۸۳۰، ۸۳۲، ۸۳۴، ۸۳۶، ۸۳۸، ۸۴۰، ۸۴۲، ۸۴۴، ۸۴۶، ۸۴۸، ۸۵۰، ۸۵۲، ۸۵۴، ۸۵۶، ۸۵۸، ۸۶۰، ۸۶۲، ۸۶۴، ۸۶۶، ۸۶۸، ۸۷۰، ۸۷۲، ۸۷۴، ۸۷۶، ۸۷۸، ۸۸۰، ۸۸۲، ۸۸۴، ۸۸۶، ۸۸۸، ۸۹۰، ۸۹۲، ۸۹۴، ۸۹۶، ۸۹۸، ۹۰۰، ۹۰۲، ۹۰۴، ۹۰۶، ۹۰۸، ۹۱۰، ۹۱۲، ۹۱۴، ۹۱۶، ۹۱۸، ۹۲۰، ۹۲۲، ۹۲۴، ۹۲۶، ۹۲۸، ۹۳۰، ۹۳۲، ۹۳۴، ۹۳۶، ۹۳۸، ۹۴۰، ۹۴۲، ۹۴۴، ۹۴۶، ۹۴۸، ۹۵۰، ۹۵۲، ۹۵۴، ۹۵۶، ۹۵۸، ۹۶۰، ۹۶۲، ۹۶۴، ۹۶۶، ۹۶۸، ۹۷۰، ۹۷۲، ۹۷۴، ۹۷۶، ۹۷۸، ۹۸۰، ۹۸۲، ۹۸۴، ۹۸۶، ۹۸۸، ۹۹۰، ۹۹۲، ۹۹۴، ۹۹۶، ۹۹۸، ۱۰۰۰، ۱۰۰۲، ۱۰۰۴، ۱۰۰۶، ۱۰۰۸، ۱۰۱۰، ۱۰۱۲، ۱۰۱۴، ۱۰۱۶، ۱۰۱۸، ۱۰۲۰، ۱۰۲۲، ۱۰۲۴، ۱۰۲۶، ۱۰۲۸، ۱۰۳۰، ۱۰۳۲، ۱۰۳۴، ۱۰۳۶، ۱۰۳۸، ۱۰۴۰، ۱۰۴۲،

(۱) جدول ص تقریباً مشابہہ والکن لیس تماماً جدول  $\Delta$  ص؟

(ب)  $\Delta$  حصہ تماماً مثل ص "؟

١٤- إذا كانت  $ص = س^٣$  ،  $ص = س^٣$  ،  $ص = س^٦$  .

کون جداول ص، ص، ص، "، Δ ص، Δ<sup>۲</sup> ص۔ اہل صحیح

أن: (۱) صَ تغیر تقریباً مثل  $\Delta$  ص؟

(ب) ص "تغییر تقریباً مثل  $\Delta$  ص<sup>۲</sup>؟

١٥ - إذا درست مسألة ووجدت أن الصيغة التي تعطى ص-

تتغير بطريقة مخالفة تماماً عن  $\Delta$  ص (مثلاً ص تتزايد باستمرار ،  $\Delta$  ص تتناقص باستمرار) فهل تعتقد أنك أخطأت في حسابك أم لا ؟ ماذا يحدث مع ص<sup>٢</sup> ،  $\Delta$  ص<sup>٢</sup> ؟ هل تنوقعهما ، كقاعدة، أن تتغيرا تقريباً بنفس الطريقة ؟

**\*\* معرفتي \*\***  
[www.ibtesama.com](http://www.ibtesama.com)  
منتديات مجلة الإبتسامة



# الباب الحادي عشر

## من السرعة إلى المنحنيات

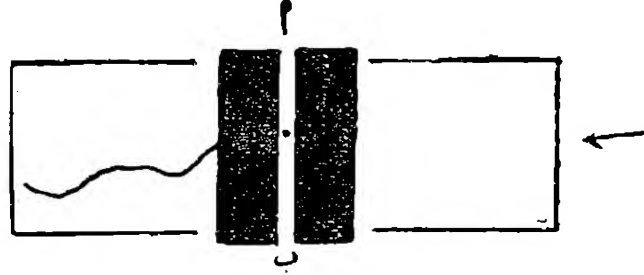
إن مواطننا الدكتور جول قد ساق مثلاً الحوت الذي قد تبلغ سرعته ثلاثين ميلاً في الساعة ، بينما بعض أنواع السمك الأخرى قد تبلغ سرعتها أكثر من ذلك كثيراً ، ودعا كل من يريد أن ينجح في بناء السفن إلى دراسة النسب الطبيعية .  
من تاريخ قناة السفن بمانشستر لمؤلفه بوسدن ليتش .

قد اعتبرنا حتى الآن أن  $v$  أو  $\frac{v}{s}$  رمزاً لـ سرعة نقطة

متحركة . وهذا يكفي جداً لتطبيقات كثيرة هامة ولكن هذا نصف الموضوع فقط . فهناك مسائل كثيرة يمكن أن يستعمل فيها حساب التفاضل . فمثلاً يمكن بواسطة إيجاد شكل المنحنى الذي تتخذه سلسلة معلقة من طرفيها ، أو الطريقة التي يتوزع بها الإجهاد على كوبرى . وفي أية حالة من هذه الحالات لا توجد حركة ما .

من السهل أن ننقل معلوماتنا عن الحركة إلى بيانات عن منحنى

إذ أن أى نوع من الحركة يمكن بسهولة تمثيله بمنحنى . اعتبر الجهاز البسيط المبين فى شكل ٩ .



( شكل ٩ )

نفرض أن هناك سن قلم متحركة فى الفتحة أ ب . وأن تحت الفتحة صفحة من الورق متحركة بسرعة ثابتة نحو اليسار . فمن الواضح أنه يمكن تسجيل حركة القلم على الورقة على شكل منحنى . وإذا أردنا معرفة كيف كان القلم متحركاً فما علينا إلا أن نمرر الورقة مرة أخرى تحت الفتحة ومن خلالها يمكننا أن نرى جزءاً صغيراً جداً من المنحنى يظهر على شكل نقطة متحركة إلى أعلى وإلى أسفل بمرور الورقة نحو اليسار .

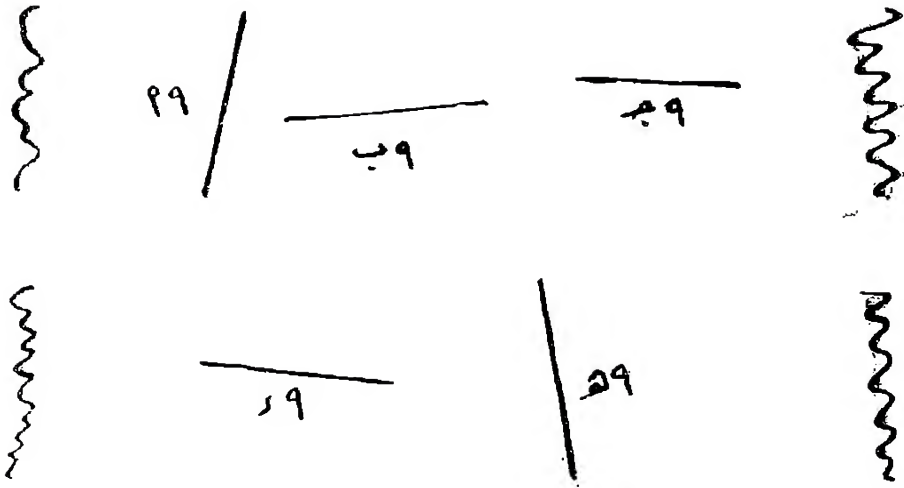
هذا الجهاز أشبه ما يكون بالحاكى . إذ يحفر بحرى أسطوانة الحاكى بواسطة إبرة متذبذبة ، ويادارة الأسطوانة يمكننا الحصول على الذبذبات الأصلية . وعلى ذلك فجميع خواص الحركة الأصلية يمكن إلى حد ما الاحتفاظ بها فى شكل المجرى ؛ وأى تغيير فى شكل المجرى سوف يسبب بعض الاختلاف عند إدارة الأسطوانة .

وبنفس الطريقة ، ترتبط حركة سن القلم مع المنحنى المرسوم على الورقة المتحركة . وأى شىء يمكن أن يقال عن حركة القلم يخبرنا بشىء عن شكل المنحنى . وأى شىء يمكن أن يقال عن المنحنى يخبرنا بشىء عن حركة القلم .

والآن نعلم أن صَ تعبر عن مقدار السرعة التى يتحرك بها القلم عند أية لحظة ، ص " تخبرنا عما إذا كانت سرعة القلم متزايدة أو متناقصة ، لذا كان من الضرورى معرفة معنى صَ ، ص " وما تخبرنا به عن شكل المنحنى المرسوم بالقلم . وسوف يكون ذلك هو مهمتنا التالية .

### هامة الحركة المنتظمة

سوف نبدأ باعتبار أبسط حالة. الأشكال فى ص ٢٥٦ من ١٩ إلى ٩ هـ تبين الآثار المتخلفة من خمس تجارب . فى كل حالة من هذه التجارب تحرك القلم بسرعة منتظمة. وكان عرض شريط الورق بوصة واحدة يتحرك خلال الفتحة تجاه اليسار بمعدل بوصة واحدة فى الثانية . إنه يمكنك إذا شئت أن تنشأ جهازاً على النمط المبين فى شكل ٩ وتمرر هذه الأشرطة خلالها ، وبذلك تحصل مرة أخرى على الحركات الأصلية .



ماذا يحدث عندما يمر ٩٩ خلالها ؟ إنها تأخذ فقط جزءاً من خمسة أجزاء من الثانية ، وخلال هذه الفترة تقطع النقطة المتحركة عرض الورقة ، مسافة بوصة واحدة . ٩٩ هي أثر نقطة متحركة بسرعة ٥ بوصة في الثانية ولذلك فإن  $v = 5$  .

٩٩ هي أثر نقطة متحركة لأعلى الفتحة ولكن بمعدل أبطأ بكثير . في ثانية واحدة ارتفعت النقطة جزءاً من عشرة أجزاء من البوصة فقط . هنا  $v = \frac{1}{5}$  .

بمجرد مقارنة ٩٩ ، ٩٩ يمكننا أن نرى أن الخط يكون شديد الانحدار عندما تكون النقطة قد تحركت بسرعة كبيرة ( أي عندما تكون  $v$  كبيرة ) ، ولكنه يكون مستوياً تقريباً عندما تتحرك النقطة ببطء (  $v$  صغيرة ) . في الحقيقة  $v$  تقيس مقدار انحدار الشكل .

و ٩ ج هي الأثر المتخلف عندما يكون سن القلم في حالة سكون .  
فتبقى النقطة على نفس الارتفاع . ولا يكون لها سرعة حينئذ  
ص = صفر وعلى ذلك فإذا كانت ص = ٠ فإن الشكل  
يكون مستوياً .

في ٩ و تحرك سن القلم أسفل الفتحة أثناء مرور الورقة .  
فبعد مرور ثانية كانت النقطة قد تحركت لأسفل واحد من عشرة  
من البوصة . وبذلك يكون التغير في ص خلال ثانية واحدة  
— ١/٥ ، ويتبع ذلك أن تساوى ص — ١/٥ .

أيضاً في ٩ هـ يهبط سن القلم بوصة واحدة في جزء من خمسة  
أجزاء من الثانية ؛ وبذلك يكون هابطاً بمعدل ه بوصات في  
الثانية ، أي ص = — ه .

يلاحظ أن الشكل ينحدر إلى أسفل عندما تكون ص  
سالبة ( حالة و ، ه ) ويتجه إلى أعلى عندما تكون ص موجبة  
( حالة ا ، ب ) .

وبالاختصار فإن انحدار الشكل يتوقف على مقدار ص :  
فسواء ارتفع الخط إلى أعلى أو انخفض إلى أسفل فإن ذلك  
يتوقف على ما إذا كانت إشارة ص + أو — ، ص = ٠  
تعني أن المنحنى مستوياً .

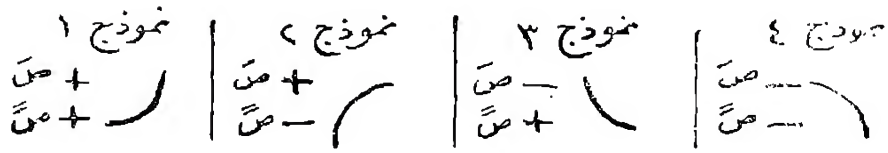


## الحالة العامة

قد اعتبرنا فقط إلى الآن ما قد يحدث عندما يتحرك سن القلم بسرعة منتظمة ولكن هذه ليست الحالة دائماً . فكثيراً ما نضطر لدراسة أشياء تتحرك بسرعات مختلفة في فترات مختلفة . إلا أنه لا يزال في الإمكان استخدام النتائج التي توصلنا إليها بدراسة الحالات البسيطة . يجب أن نتحقق من ذلك بنفسك ، بواسطة جهاز ما على نمط شكل هـ . إذا حركت قلماً إلى أعلى وأسفل الفتحة بغير سرعة فإنك سوف تجد أنه عندما يتحرك القلم بسرعة فإن الأثر الذي يتركه يكون منحدرأ ؛ وعندما يتحرك ببطء فإن الأثر الذي يتركه لا يكون كثير الانحدار . حتى أنه يمكننا أن نقول إن السرعة تناظر الانحدار . فإذا تغيرت السرعة فإن انحدار الشكل أيضاً يتغير . في هذه الحالة يكون الشكل مقوساً بدلاً من أن يكون مستقيماً كما كان سابقاً .

هذا يسوقنا إلى موضوع ص" . تخبرنا ص" عن مقدار سرعة تغير السرعة ص" . سوف نركز اهتمامنا في إشارة ص" ، سواء كانت + أو - فإذا كانت ص" + فذلك يعني أن ص" تزيد . ( أي أن ص" تتغير بإضافة شيء إليها ) وإذا كانت ص" - فذلك يعني أن ص" تنقص ( يطرح شيء منها ) .

لاحظ النماذج الأربعة المبينة في الشكل :



ما هي إشارات ص<sup>-</sup> ، ص<sup>+</sup> في نموذج ١ ؟ هذا المنحنى يرتفع وإنحنائه إلى أعلى لذلك فإن ص<sup>-</sup> يجب أن تكون + . وكلما تحركت إزداد إنحدار المنحنى وازدياد إنحداره (مقاسا بـ ص<sup>-</sup>) متزايدة . هذا يعني أن ص<sup>+</sup> يجب أن تكون + .

من السهل أن يحدث لك بعض البلبلة بين معنى ص<sup>-</sup> ، ص<sup>+</sup> تذكر أن ص<sup>-</sup> تقيس مقدار سرعة ص<sup>-</sup> أي تقيس ص<sup>-</sup> سرعة نقطة متحركة . كما تقيس ص<sup>+</sup> مقدار سرعة تغير ص<sup>+</sup> ، أي مقدار سرعة تغير السرعة .

إذا كان هذا المنحنى يوضح جزءاً من الشكل البياني لغزوة حربية فإنه سوف يعني (١) أن الجيش كان متقدماً (ب) وأن سرعة تقدمه كانت دائماً متزايدة . (٢) تناظر القول الرياضي أن ص<sup>-</sup> + (ب) تناظر القول أن ص<sup>+</sup> + .

لدينا حالة مختلفة في نموذج ٢ . حقيقة أن انحناء المنحنى إلى أعلى ولكن كلما تحركت قبل الانحناء . وهذا يناظر الإشارة الحربية : تقدمنا مستمر ولكن أخذ يقل نتيجة لمقاومة عنيفة .

حيث إنه تقدم ، تكون ص + . وحيث أن معدل التقدم أخذ يقل تكون ص - .

وعلى الفرد أن يعطى عناية لنماذج ٣، ٤ نتيجة كون ص سالبة ، وعلينا أن نتذكر أن تغير ص من - ١٠ إلى ص = - ١ يعبر عن زيادة في ص نتيجة لخواص الأرقام السالبة .

نموذج ٣ يمثل في البداية هبوطاً سريعاً ، وبالأساليب العسكرية هزيمة . وبعد ذلك يستمر المنحنى في الهبوط ولكن بسرعة أقل . لقد أرقف التفهقر . وأخذ الموقف يتحسن . يحقق هذا التحسن إشارة ص الموجبة . يبين الهزيمة إنحناء المنحنى إلى أسفل : حيث ص - .

ربما يتذكر القارى أن الخط ه بانحداره إلى أسفل يجعل ص = - ٥ بينما في ه وفيه ص = - ١ . في نموذج ٣ ينحنى الجزء الأول مثل الخط ه بينما تكون نهاية المنحنى أشبه بالخط ه ، وعلى ذلك ففي نموذج ٣ تبدأ ص بأن تكون حوالى - ٥ وتنتهى بأن تكون حوالى - ٥ وتنتهى بأن تكون حوالى - ١ . وهذا هو سبب كون ص ، معدل تغير ص ، موجبة .

من الناحية الأخرى في نموذج ٤ يتأزم الموقف بغاية السرعة .

فكلما هبط المنحنى إلى أسفل زاد إنحداره باستمرار . ربما تكون ص<sup>-</sup> في البداية —  $\frac{1}{2}$  وفي النهاية — ٥ . وبذلك تتغير ص<sup>-</sup> من س<sup>-</sup> إلى أسوأ ، أى تكون ص<sup>-</sup> .

وبهذه النماذج الأربعة نكون قد ذكرنا كل الاحتمالات الأساسية . إما أن تكون ص<sup>-</sup> . أو — ، وإما أن تكون ص<sup>+</sup> . أو — ( ما لم يحدث أن تكون ص<sup>-</sup> ، ص<sup>+</sup> صفراً ) . وباستعمال النماذج الأربعة يمكننا أن نستنتج شكل أى منحنى على شرط أن نعرف إشارة ص<sup>-</sup> ، ص<sup>+</sup>

لاحظ أنه من السهل تماماً أن تعطى ص<sup>-</sup> معنى بسيطاً . فعندما تكون ص<sup>+</sup> + يكون المنحنى محدباً ( نماذج ١ ، ٣ ) وعندما تكون ص<sup>-</sup> — يكون المنحنى مقعراً ( نماذج ٢ ، ٤ )

### سؤال

نفرض أنك ستأت عن الشكل العام للمنحنى  

$$ص = س^٢ - س^٣ ؟$$
سوف نعتبر شكل المنحنى بين  $س = -٢٠$  ،  $س = +٢٠$  .  
نبدأ بتعيين قيمة ص<sup>-</sup> ٦ ص<sup>+</sup> . حيث إن  $ص = س^٢ - س^٣$   
فإن  $ص = س^٢ - س^٣$  ،  $ص = س^٢ - س^٣$

واضح أن ص' تكون + عندما تكون س + ، - عندما تكون س - . هذا يبين أن المنحنى يكون محدباً لجميع قيم س الموجبة مقعراً لجميع قيم س السالبة .

إذا حسبنا بعض قيم س سوف ترى أن  $3س^2 - 3$  وهي قيمة ص تكون + عندما تقع من بين - 20 ، - 1 وأيضاً عندما تقع بين 1 ، 20 ،  $3س^2 - 3$  تكون - عندما تقع بين - 1 ، 1 .

ويمكننا جمع هذه البيانات في جدول كالآتي : -

س	- 20	- 1	0	1	20
ص	+++	---	---	---	+++
ص'	+++	++	---	---	---
المنحنى يشبه نموذج	2	2	2	4	4
نستنتج من ذلك أنه :	1	1	1	3	3

من س = - 20 إلى - 1 يشابه المنحنى مع نموذج 2

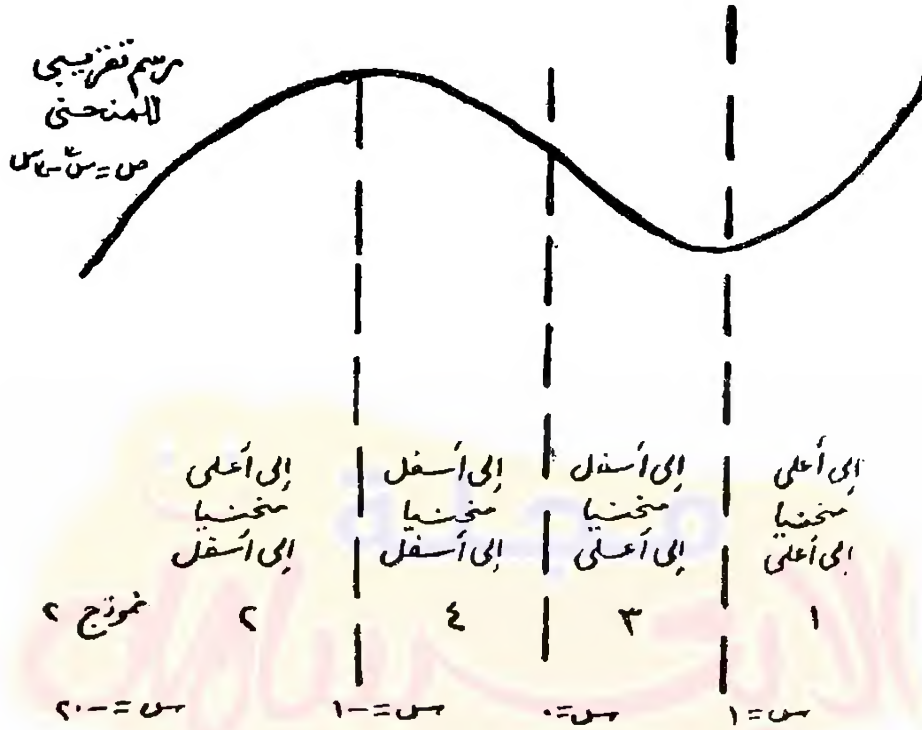
- 1 إلى 0 يشابه المنحنى مع نموذج 4

0 إلى 1 يشابه المنحنى مع نموذج 3

1 إلى 20 يشابه المنحنى مع نموذج 1



من هذه البيانات مجتمعة نرى أن الشكل العام للمنحنى يجب أن يكون كالآتي :



وكان من الممكن بالطبع أن نرسم شكلاً مضبوطاً بتعيين عدد كبير من النقط على المنحنى . وبذلك نحصل في النهاية على نفس المنحنى . لكن الطريقة التي شرحناها مستعملين ص ، ص تكون في العادة أفصر وأكثر تثقيفاً وفناً . وسوف توضّح بعض الأمثلة في نهاية هذا الفصل وجهة النظر هذه .

سبق أن رأينا في الفصل العاشر أن ص كانت تقيس السرعة ، ص القوة المؤثرة على جسم متحرك . وكانت ص الموجبة تعني أن

الجسم مدفوع إلى أعلى (أو في بعض الحالات إلى الأمام) ، ص"  
السالبة تعني أن الجسم مدفوع إلى أسفل (أو في بعض الحالات  
إلى الخلف) .

لكن يمكننا بدراسة الشكل الذى يمثل حركة الجسم أن نرى  
كيف تتغير ص ، ص" . فيمكننا عندما ننظر إلى الشكل أن نقول  
( مثلاً ) "هنا يرتفع الشكل بانحدار شديد . فالجسم لا بد أن  
يكون متحركاً بسرعة كبيرة . ولكن المنحنى ينثنى إلى أسفل وهذا  
يعنى أن ص" سالبة وأن هناك قوة تعمل على إيقاف الحركة .

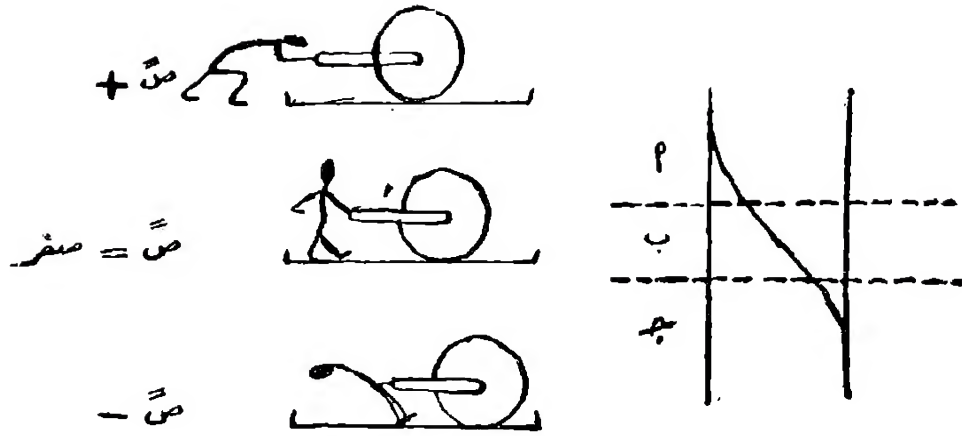
بقابل من التمرين يكون من السهل تماماً أن نتحدث عن الشكل  
عن كيفية تغير ص ، ص" ، أين تكون ص" + وأين تكون  
ص" سالبة إلخ ...

ولكن نفرض أننا لا نكتفى بوصف عام بل نفرض أننا نريد  
قياس السرعة عند لحظة معينة ؛ كيف يمكننا ذلك ؟

لقد رأينا ( فى فصل ١٠ ) أن السرعة الحقيقية للجسم لا تختلف  
كثيراً ( فى العادة ) عن السرعة المتوسطة خلال فترة وجيزة من  
الزمن . فإذا علمنا مقدار المسافة التى يقطعها جسم فى جزء من  
عشرة أجزاء من الثانية ، لأمكننا تكوين فكرة عن مقدار  
سرعة حركته .

إذا عرض علينا الشكل الذى يبين حركة جسم هل يمكننا أن نعرف المسافة التى يقطعها بعد جزء من عشرة أجزاء من الثانية ؟

يبين شكل ١٠ جزء من منحنى مكبراً تكبيراً مناسباً . تمثل المسافة  $AB$  جزء من عشرة أجزاء من البوصة ، وتناظر جزء من عشرة أجزاء من الثانية : فى بداية هذه الفترة من الثانية لمس القلم الورقة عند  $A$  وفى نهاية عشر الثانية لمس الورقة عند  $B$  . لا بد وأن يكون قد تحرك إلى أعلى مسافة مقدارها  $AB$  فى أثناء هذه الفترة . بكلمات أخرى تمثل  $AB$  التغير فى  $s$  : أى  $\Delta s$  . ويمثل الطول  $AB$  الزمن الذى مر وبذلك فإن  $AB = \Delta s$  . حينئذ يمكن إيجاد السرعة المتوسطة  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  بقسمة الطول  $AB$  على الطول  $AB$  .  $AB$  يساوى  $AB$  فى الطول . ولذلك فإن  $AB$  مقسوماً على  $AB$  يمثل السرعة المتوسطة . وواضح أن  $AB$  على  $AB$  يعطينا مقياساً تقريبياً لانحدار المنحنى بين  $A$  و  $B$  .



### نمط الحركة

يسجل المنحنى الأيمن حركة الهراسة . لمقاربة هذا المنحنى  
بجهاز شكل ٩ كان من الضروري أن نجعل الصفحة رأسية  
حينئذ تبدو الهراسة وكأنها تتحرك إلى أعلى ( تحرف  
القلم في الفتحة ) .

يمكن تقسيم الحركة إلى ثلاث مراحل ١ ، ب ، ج .

( ١ ) على الرجل أن يدفع بشدة لكي يحرك الهراسة . إنه يدفع للأمام  
( ص " + ) ولكن الهراسة لم تتحرك بعد بسرعة ( ص " صغيرة  
والمنحنى ليس منحدرًا )

( ب ) الهراسة الآن في حالة حركة . والرجل يمشى بجوارها ولكن يسمح  
لها بالدخول بدون دفع أو جر ( ص " = . لا توجد قوة ) .

( ج ) لإيقاف الهراسة على الرجل أن يسحبها للخلف ( ص " - )





ولذلك يمكن أن نشرح ماهية ص بدون أن ندخل بالمرّة  
فكرة السرعة . إذا بدأ الإنسان بالرسم البياني وأخذ نقطة ب  
قريبة من ١ ورسم الشكل ، وقاس :  $د ه$  ،  $ح ه$  ثم حسب  $\frac{د ه}{ح ه}$   
ثم بدأ ثانية : وأخذ ب أكثر قرباً من ١ وقسم  $د ه$  على  $ح ه$   
للكل جديد فإنه يلاحظ أنه كلما إزدادت ب قرباً من ١ كلما  
اقتربت النتيجة من عدد معين . العدد الذي تقترب منه هو ص :  
يمكننا اعتبار ص مقياساً لانحناء المنحنى عند النقطة ح .

بهذه الطريقة نكون قد أعطينا ص معنى بعيداً تماماً عن  
فكرة الحركة . يمكن عمل نفس الشيء مع ص . ويمكن تطبيق  
هذه الرموز ( كما ذكرت سابقاً ) على مسائل عن شكل سلسلة  
معلقة أو قنطرة كوبري . أو أحسن منحنى لأسنان عجلة التروس .  
ولا تعجب إذا وجدت أنه لا يزال هناك تطبيقات أخرى على  
ص لا يدخل فيها الشكل أو السرعة . فمثلاً يمكن أن تمثل س  
درجة حرارة جسم ، وتقاس ص كمية الحرارة الموجودة في  
الجسم . حينئذ يمكن إعطاء ص معنى . وحينما نجد الرمز ص أو ،  
 $\frac{د ه}{ح ه}$  لابد وأن يكون في المسألة كميّتان س ، ص مرتبطتان معاً

بحيث إن أى تغيير فى س يحدث تغييراً مباشراً فى ص .

لقد اضطررنا فى البداية إلى تعريف ص كسرعة والآن يمكننا أن نستغنى عن هذا التعريف . فإذا كان لديك بعض الخبرة بتطبيقات ص المختلفة ربما يكون من الممكن اعتبارها كالعدد الذى يقترب من  $\frac{\Delta v}{\Delta s}$  عندما تصغر  $\Delta s$  صغراً كافياً . لكن لا تتسرع فى التفكير بهذه الطريقة . حتى ولو كان لك دراية بمعنى ص فإنه كثيراً ما يكون من المفيد أن تعتبرها كسرعة أو كإحدار رسم بياني .

### استعمال الألفاظ التقريبية

ربما لم تذهلك من قبل الفكرة الغامضة عن السرعة ، لقد كان من السهل تماماً أن نوضح السرعة المتوسطة ، فإذا قطعت عربة ٣٠ ميلاً فى ساعة . هذا معنى بسيط وكاف . ولكن ما هى سرعتها عند لحظة التصادم بالضبط ؟ هذه عملية أكثر صعوبة . إن قياسها أصعب بكثير إذ علينا أن نقوم بعمليات صعبة للغاية . أحسب السرعة المتوسطة فى الدقيقة السابقة للتصادم ، للثانية السابقة ،

لعشر الثانية السابقة وهكذا . لاحظ. ما إذا كانت الإجابات تقترب من عدد معين . فإذا كانت كذلك فهذا العدد يمثل السرعة عند لحظة التصادم .

وفي الحقيقة للقيام بهذه العملية علينا أن نقيس فترات قصيرة جداً من الزمن :

جزءاً من مائة ، جزءاً من ألف ، جزءاً من مليون على الترتيب ، والمسافات القصيرة جداً التي قطعت في هذه الأزمدة . وحتى بعد ذلك يجب ألا نكون متأكدين تماماً من الحصول على الجواب الصحيح . إنه من الممكن دائماً في آخر جزء من مليون من الثانية أن يكون السائق قد ضغط على الفرامل بشدة عما قبل حتى أن السرعة في آخر لحظة كانت فعلاً أقل مما يجب أن نتوقعه من السرعة المتوسطة في أثناء آخر جزء من مليون من الثانية .

يختلف المهندسون وعلماء الرياضة البحتة في نظرتهم لهذه المسألة . فالمهندس يعتقد أن هذا البحث مضيعة للوقت . فلا يهمه إذا كانت السرعة ٥٠ ميلاً في الساعة أو ٥٠,٠٠٠,٣١ ميلاً في الساعة ، فهو لا يمكنه قياس السرعة بعد درجة معينة من الدقة كما أنه لا يرغب في ذلك بأية طريقة . حتى لو ضغط على الفرامل

بشدة أكثر في آخر جزء من مليون من الثانية فإنها سوف تغير السرعة بكمية صغيرة فقط . إن ما يهم المهندس هو أن السرعة المتوسطة لآخر جزء من مليون من الثانية تساوى السرعة عند لحظة التصادم .

لما لا يتفق عالم الرياضة البحتة مع وجهات النظر هذه ؟ لا يرجع هذا لهوى في نفوس علماء الرياضة بل إلى عدة أسباب بعضها تاريخي . ففي البداية كان ينظر لحساب التفاضل من الناحية العملية فقط . لقد اعتبرت فترات وجيزة من الزمن ، وعند حساب السرعة المتوسطة فرض أن فترة الزمن تساوى عدداً معيناً أكبر من الصفر . لكن ظهر في النتائج أشياء غير مرغوب فيها ، ولذا استدار علماء الرياضة ، وقالوا إن الفترة الوجيزة كانت من الصغر بحيث يمكن اعتبارها صفراً . وبذلك كان من الطبيعي أن يشعر الطلبة بغرابة هذا الموضوع . ورفض بعض علماء الرياضة أن يصدقوا أن مثل هذه الطريقة يمكن أن تؤدي إلى نتائج صحيحة . وبذلك اضطر علماء الرياضة أن يوضحوا هذا الخلط وأن يوجدوا طريقة أكثر دقة ومنطقاً لشرح ما يقصدونه بالسرعة . سوف نجد في كتب حساب التفاضل الحديثة التي وضعها الرياضيون الحديثون براهين طويلة ودقيقة للغاية ، مكتوبة بطريقة منطقية جداً . إنه من المستحسن أن تفهم هذه البراهين ، ولكن ليس



عند بداية معرفتك بحساب التفاضل أولاً تعلم أن تستعمل حساب التفاضل، وأن ترى ما يمكن عمله به، وأن تشعر بماهيته. وفي طريقك إلى ذلك سوف تجد بالتدريج أنك أصبحت في حاجة إلى أفكار أكثر دقة حينئذ يكون الوقت قد حان لدراسة الطرق الحديثة التي تعرف في العادة بالتحليل.

هناك أسباب أخرى تجعلنا نستعمل السرعة الحقيقية. وهذا شيء واحد هو أنه لم يتفق بعد على أصغر كمية يمكن اعتبارها. فالنجار يستعمل واحداً من المائة من البوصة والمهندس واحداً من ألف والعالم واحداً من مليون، ميكروبات، ذرات، أشعة ضوئية. والمهندس الآلة البخارية يعتبر واحداً من مائة من الثانية زمناً قصيراً. والمهندس اللاسلكي الذي يفكر بملايين الدورات في الثانية، واحد من الثانية زمن طويل. عالم الرياضة البحتة الذي نستعمل نتائجه بأى من هؤلاء الرجال يمكنه أن يتأكد من تحقيق جميع الرغبات الممكنة، فقط بإعطائه النتيجة الصحيحة.

مرة أخرى تكون النتيجة الصحيحة في العادة أبسط من غير الصحيحة. فعندما درسنا سرعة الجسم المناظرة للصيغة  $s = t^2$  وجدنا نتائج تقريبية عديدة. فمثلاً وجدنا أن السرعة بعد ثانية واحدة كانت واقعة بين ١,٩٩، ٢,٠١. نفرض أننا اكتفينا وقلنا أن ٢,٠١ نتيجة كافية. وهذه نتيجة أكثر تعقيداً



من القيمة الحقيقية . فإذا كنا في أثناء عملنا قد اعتبرنا واحداً من المائة من الثانية فترة من الزمن صغيرة صغراً كافياً لأغراضنا لكما قد توصلنا إلى الصيغة  $ص = ٢ س + ٠.١$  ر تقريباً وهذه أكثر تعقيداً من النتيجة الصحيحة  $ص = ٢ س$  ، حتى المهندسون يستعملون  $٢ س$  كسرعة مناظرة إلى  $٢ س$  . وتمهد النتيجة البسيطة لتعريف أشياء أكثر تعقيداً .

وهناك كما ترى تبريراً عملياً أكثر للدقة المحبة إلى علماء الرياضة البحتة . ولكن هذا جانب واحد من المسألة . وهناك حالات كثيرة تكون فيها الفكرة التقريبية مساعدة للغاية . كثيراً ما تساعدنا الفكرة التقريبية للمسألة أن نرى ما تعنيه المسألة وأن نرى طريقاً للحل . ربما يكون في نتيجةنا خطأ مقداره بعض أجزاء من مليون ولكن سوف يكون كافياً لكي يعطينا فكرة عامة عن الحل . حينئذ نتمكن من فحص عملنا ومن أن نصقل كل مرحلة في العمل حتى تصبح العملية كلها مضبوطة وألا نبقى قانعين بالحل التقريبي للمسألة . كثير من المسائل التي يصعب حلها بالطرق المضبوطة يمكن للباحثين دراستها بالطرق التقريبية حيث تعطى النتائج مقربة إلى رقمين عشريين وهذا يكفي للغرض المطلوب .

## بعض أمثلة الموقف التقريري

نفرض مثلاً أنه طلب منا إيجاد  $\frac{ص}{س}$  (أى ص) المناظرة

إلى الصيغة  $ص = لو س$  . هذه مسألة جديدة . إننا نعرف كيف  
نعالج كمية مكونة من قوى  $س^2$  لكن لو س ليست من هذا النوع  
البسيط . فما الذى نفعله ؟

إن الطلبة الذين يدرسون لمجرد حل المسائل البسيطة بالطرق  
المدرسية لا يكون لهم بالطبع أية حيلة لمواجهة نوع جديد من  
المسائل . إنهم يواجهونها ولا يمكنهم أن يفعلوا شيئاً بالمرّة . إنى  
أرجو ألا يجد القراء أنفسهم فى هذا الوضع بل يروا كيف  
يتفاعلون مع المشكلة وكيف يجدون لها حلاً .

هل تعرف ما هى لو س ؟ إذا كنت قد وجدت صعوبة فى الباب  
السادس فلا فائدة من قراءة تلك لهذا الباب . فإذا لم يكن عندك  
فكرة واضحة عن معنى لو س من العبث أن تتوقع أنهم معدل تزايد  
لو س ، وإذا لزم الأمر فعليك بقراءة الباب السادس مرة أخرى .  
ارسم شكلاً يبين العلاقة  $ص = لو س$  باستخدام جداول  
اللوغاريتمات ( يقصد بالرمز لو س اللوغاريتم العادى كما هو معطى  
فى الجداول العادية ) . لو س هو الرمز الكامل . هذا يعنى ،

باستعمال لغة الباب السادس ، أن دلالة واحدة تناظر الضرب  
في ١٠) . ارسم هذا الشكل لقيم  $s$  الواقعة بين ١ ، ١٠ بتعيين  
نقطة كافية لتعطى شكلاً مضبوطاً . سوف تلاحظ أن الشكل  
يكون أكثر انحداراً عند  $s = ١$  . وكلما زادت  $s$  قل انحدار  
الشكل . وبذلك نتوقع أن الصيغة التي تعطى  $v$  سوف تجعلها  
تقل بزيادة  $s$  .

يمكننا الحصول على فكرة تقريبية عن  $v$  بعمل تغيير  
مقدار ١,٠ في  $s$  وملاحظة التغيير الذي يحدث في  $v$  . وقد  
بيننا جزءاً من العمل في جدول رقم ١٣ على الصفحة التالية ،  
وبدلاً من كتابة قيم  $s$  في صفوف عبر الصفحة تكون أكثر  
ملاءمة إذا كانت في أعمدة .

### جدول رقم ١٣

س	ص = لوس	$\Delta$ ص	$\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$
١	٠,٠٠٠٠	٠,٠٤١٤	٠,٤١٤
١,١	٠,٠٤١٤	٠,٠٣٧٨	٠,٣٧٨
١,٢	٠,٠٧٩٢	٩,٠٢٤٧	٠,٣٤٧
١,٣	٠,١١٣٩	٠,٠٣٢٢	٠,٣٢٢
١,٤	٠,١٤٦١	٠,٠٣٠٠	٠,٣٠٠
١,٥	٠,١٧٦١	٠,٠٢٨٠	٠,٢٨٠
١,٦	٠,٢٠٤١		
٢,٠	٠,٣٠١٠	٠,٠٢١٢	٠,٢١٢
٢,١	٠,٣٢٢٢		
١٠,٠	١,٠٠٠٠	٠,٠٠٤٣	٠,٠٤٣
١٠,١	١,٠٠٤٣		

يوجد في العمود الأول قيم س ، ويزيد كل عدد بمقدار ١,٠ عن الذي قبله وبذلك يكون التغير في س،  $\Delta$  س دائماً ١,٠ ، ويعطى العمود الثاني لوغاريتم العمود الأول الموجود به جداول اللوغاريتمات كما يعطى العمود الثالث التغيرات الموجودة في العمود الثاني ،  $\Delta$  ص . ويعطى العمود الرابع تقديراً تقريدياً عن السرعة

ص، بقسمة التغير في ص،  $\Delta$  ص على التغير المناظر في س،  
 $\Delta$  س . القسمة على ١ و هي تماماً كالضرب في ١٠ . وبذلك  
تكون الأعداد التي في العمود الرابع هي عشرة أصناف نظيرها  
في العمود الثالث .

الجدول المعطى ص ٢٧٦ ليس كاملاً فقد حذفت الأعداد التي  
بين ١،٠،٢،٠،١ والتي بين ١،٠،٢،٠،١ وذلك لضيق المقام . هذه  
الفجوات يمكن للقارى أن يكملها .

تعطينا الأرقام الموجوة في العمود الرابع مقياساً تقريبياً  
لانحدار الرسم البياني للدالة  $v = \log s$  . ومن الواضح بالملاحظة  
أن الرسم البياني يقل انحداره بازدياد س . المشكلة التالية هي  
إيجاد صيغة تربط هذه الأعداد . حيث إن الأعداد غير صحيحة  
فسوف نقنع بصيغة تحققها إلى حد ما كما إننا لا نتوقع تحقيقاً تاماً .

إن التفكير في الصيغة الصحيحة في العادة عمل شاق إذ يحتاج  
الاكتشاف الجديد إلى سنين طويلة . وعلى الإنسان ألا تثبط همته  
إذا استغرق بضع أسابيع في حل مسألة من هذا الطراز . بل عليه  
أن يجرب فكرة بعد الأخرى حتى يصيب الجواب الصحيح .

إنه من المفيد أن يرسم الإنسان مجموعة من الأشكال البيانية  
لدوال مختلفة حينئذ يمكنه أن يرسم الشكل البياني للجدول المعطى  
ويرى أى شكل بياني أكثر شهاً به .



ربما يجد الإنسان حلاً لمسألتنا بمقارنة النتيجة عند  $s = 1$  مع النتيجة عند  $s = 2$ ، قباله  $s = 1$  لدينا في العمود الرابع ٤١٤ و. وقباله  $s = 2$  لدينا ٢١١ و. وحيث إن ٢١١ و. هي تقريباً نصف ٤١٤ و. فإن هذا يوحي أن  $s = 3$  سوف تناظر ثلث ٤١٤ و.،  $s = 4$  ربع ٤١٤ و. وهكذا

$s = 10$  يجب أن تناظر جزءاً من عشرة من ٤١٤ و. أى ٤١٤ و.

ويعطى الجدول ٤٣ و. وهي لا تختلف كثيراً. ١٥ و. يجب أن تناظر ٤١٤ و. مقسومة على ١٥ أى ٢٧٦ و. يعطى الجدول ٢٨٠ و. وهي على أية حالة قريبة قرباً كننا نتوقعه من طريقة تقريبية كهذه.

هذا العمل يوحي أن  $s$  المناظرة إلى  $s = 10$  هي شيئاً

قريباً من  $\frac{414}{s}$

يجب اعتبار هذه النتيجة كنوع من الإيماء. إنها توحي إلينا أن نرجع إلى شرح اللوغاريتمات المعطى في الباب السادس، وأن نحاول أن نرى ما إذا كان هناك سبباً واضحاً يعمل ازدياد  $s$  بمعدل يتناسب مع  $\frac{1}{s}$ . حقيقة إنه يوجد سبب ما ويمكن توضيح أن

٠٤٣٤٢٩٤/س هو الجواب الصحيح لمسألتنا . إن طريقتنا التقريبية

قد أوضحت لنا شكل الجواب وقربتنا للقيمة الحقيقية .

(في الباب السادس شرحنا معنى ١٠ س . ماهى الصيغة التى تعطى

ص إذا كانت ص = ١٠ س ؟) .

ربما نتذكر ما ذكر فى الباب السادس أنه يمكن صنع المسطرة الحاسبة بأى طول نرغبه، فإذا وضعنا العدد ١٠٠ على بعد بوصة من طرف التدرج فإن العدد س يحدث على مسافة لو س بوصة من نفس الطرف . ولكنه يمكننا أن نصنع مسطرة حاسبة تؤدي ذات الغرض إذا وضعنا ١٠ على أى بعد آخر . إن نتيجتنا عن ص المناظرة إلى ص = لو س توحى بأنه جدير بنا أن نغير التدرج بطريقة عملية . فقد وجدنا أن ص كانت تساوى

٠٤٣٤٢٩٢/س فاذا أخذنا بدلاً من ص = لو س العلامة

ص =  $\frac{\text{لو س}}{٠٤٣٤٢٩٤}$  لحصلنا على نتيجة أبسط . سوف تكون س ' حينئذ

١/س ، وسوف تؤثر قيمة س الجديدة أيضاً على المسافة التى عندها

يجب أن نضع العدد س . فاذا وضعنا أى عدد س على بعد  $\frac{\text{لو س}}{٠٤٣٤٢٩٤}$

بورصة من نهاية التدرج فإننا نحصل على مسطرة حاسبة بمقياس أكبر ولكنه لا يختلف عن المقياس السابق . توجد ١٠ على مسافة  $\frac{10}{0.434294}$  وحيث إن لو  $10 = 1$  فهذه يمكن حسابها ، إنها

تساوي ٢,٣٠٢٥٨ بوصة الآن يوجد العدد ٢,٧١٨٢٨ على بعد بوصة واحدة . هذا العدد مهم في الرياضيات وقد أعطى له اسم خاص إذ دائما يسمى بالعدد هـ . إن المسافة التي عندها نضع أى عدد على هذه المسطرة الحاسبة الجديدة يسمى باللوغاريتم الطبيعي لهذا العدد اللوغاريتم الطبيعي للعدد س هو لو س .

في البداية عندما شرحنا اللوغاريتمات بدلالة حبال ملفوفة على هـ أعمدنا اعتبارنا أن تأثير اللفة الكاملة هو ١٠ والسبب الوحيد الذي جعلنا نفعل ذلك هو أنه لدينا بالصدفة عشرة أصابع ، فلو كان لدينا ثمانية أصابع فلربما أخذنا اللفة الواحدة تناظر العدد ٨ . ولكننا حصلنا بنفس الصورة على جدول اللوغاريتمات . وبسبب ذلك كان يجب علينا استعمال الرمز لو س . يمكن استعمال أى عدد آخر إذ ليس من الضروري أن يكون عدداً صحيحاً فمثلا يمكن استعمال العدد  $2\frac{5}{8}$  وتوصل كل هذه الأرقام المختلفة إلى مساطر حاسبة جيدة تماما ولكن بأحجام مختلفة . إننا نحصل دائما على

ص =  $\frac{1}{s}$  حيث تقوم مقام عددين، ومن الطبيعي أن تفضل مجموعة اللوغاريتمات التي فيها  $1=1$  لهذا السبب من المعتاد أن نستعمل في الدراسة النظرية لو س، ه اللوغاريتم الطبيعي . فإذا كانت

$$ص = لو س فإن ص ه = \frac{1}{s}$$

### مسألة عجلة العرب

نبحث الآن في مسألة أخرى فيها الفكرة التقريبية ذات فائدة . إذا تدحرجت عجلة — مثلاً عجلة عربية — على طريق مستو، فما مقدار السرعة التي تتحرك بها الأجزاء المختلفة ؟ بالتأكيد إنها لا تتحرك جميعها بنفس السرعة . إنك في المعتاد تلاحظ عندما تمر بك عربة أنه يمكن رؤية القضبان السفلى التي تربط العجلة بمحورها بوضوح أما القضبان العليا فتتحرك بسرعة لدرجة تجعلها غير مرئية . كيف يمكن تفسير ذلك ؟

يجد إناس كثيرون أنه من الصعب أن يتبينوا عجلة متدحرجة، بالطبع ليس صعباً أن نتبينها بطريقة غير واضحة، ولكن من الصعب أن نتبينها بوضوح بحيث يمكن ملاحظة سرعة كل جزء فيها .

لذلك دعنا نستبدل بهذه المسألة أخرى أبسط منها . لأنه من السهل أن نتخيل مربعاً متدحرجاً لمقطع مربع لكتلة كبيرة متدحرجة . إنها تبدأ بأحد الجوانب مستوياً وعندما تدور حول أحد الزوايا يصبح الجانب التالي مستوياً . ثم تدور حول الزاوية التالية وهكذا . لأنه من السهل أن ترى أن الزاوية الموجودة في أسفل المربع ، الزاوية التي يلف حولها الجسم كله ، تكون في حالة سكون وكلما بعدت النقطة عن هذه الزاوية كانت حركتها أسرع .



( شكل ١١ )

والآن دعنا نجعل الكتلة المربعة تقترب من الدائرة بعمل أربع قطوع مستقيمة بواسطة منشار لإزالة الزوايا الأربع للمربع كما في شكل ١١ . إنه لا يزال من السهل جداً أن نتخيل الحركة كما



سبق فإن النقطة التي تلمس الأرض عندما يتدحرج الجسم تكون  
( في أية لحظة ) في حالة سكون .

يمكننا أن نستمر بهذه الطريقة مزيلين الزوايا وجاعلين الشكل  
يقترّب أكثر فأكثر من الدائرة . إنه لا يمكن أن يصبح دائرة  
ولكن من الممكن أن نجعله أقرب ما يكون من الدائرة بحسب  
الإرادة . يمكن للشكل الذي له ١٢٨ زاوية أن يستخدم كعجلة  
جيدة من الوجهة العملية .

وبذلك نكون قد توصلنا لنتيجة يجب أن يعرفها كل مهندس  
إن العجلة المتدحرجة تدور حول أسفل نقطة فيها وهي تكون  
( لحظيا ) في حالة سكون .

تمسكنا نفس طريقة البحث السابقة أن نستنتج المنحنى الذي  
ترسمه أية نقطة على العجلة المتدحرجة . إن المنحنيات التي تظهر  
بهذه الطريقة هي المعروفة بالسكريد ، إيبى سيكاويد ، هيبو  
سيكاويد .

في عمل العجلات المسننة هناك منحنى خاص له ميزة عظمى  
إنه المنحنى المرسوم بنهاية خيط رفيع ملفوف عندما نحل الخيط  
من حول بكره مثبتة . ربما يساعدك في أن تعرف ما يفعله الخيط  
تماماً إذا تخيلت أن البكرة ليست دائرة كاملة ولكن شكلا له

بوصات الأمام . بهذه الطريقة سوف يقطع الرجل ٥ أقدام  
في الثانية . وسوف يجرى الكلب في سلسلة من الخطوط المستقيمة  
كل منها طولها ٢ قدم متجهاً بالترتيب نحو المواضع المختلفة التي  
يقف فيها الرجل برسم هذه السلسلة يمكننا أن نرى بالتقريب كيف  
يتحرك الكلب . وطول المسافة التي يقطعها ليصل إلى الرجل .



## الباب الثاني عشر

### مسائل أخرى على حساب التفاضل<sup>(١)</sup>

« إن لمن أشق الأمور أن تطلب إلى خبير في موضوع ما شرح ماهية هذا الموضوع للرجل العادي وبيان سبب اهتمامه به إلى هذا الحد . »

س . ج . داروين مقدمة لقصة الرياضيات لمؤلفها د . لاريت

إن الذين يمهّدون الطريق لأي موضوع يفعلون ذلك عن هواية . إنهم يبدأون بنفس المعلومات ، وبنفس طرق التفكير مثل أي شخص آخر غير مثقف . يمكن شرح الاكتشافات الأولى في أي فرع من العلوم باللغة الدراجة . وهي تبدو في العادة واضحة لدرجة تجعل العلم وكأنه لا يستحق الدراسة .

إن الأجيال الحديثة وهي تبنى على ما قام به الرجال الأولون تدرس أموراً أكثر تعقيداً ، وفي أثناء هذه الدراسة تتولد أفكار جديدة وكلمات جديدة وتعبيرات عملية تبدو غريبة على الرجل

---

(١) يمكن لمن يجد صعوبة في هذا الباب أن يتجاوز عنه .

العادى . ويعبر عن الاكتشافات الحديثة فى أى علم بتعبيرات عملية تبدو غريبة علينا وصعبة للغاية على الفهم . والآن يبدو العلم صعباً لدرجة تجعله وكأنه لا فائدة من محاولة السيطرة عليه .

فى الرياضيات كما فى العلوم الأخرى يبنى كل جيل على الأساس الذى وضعه العاملون السابقون، ويضيف عليه طابقاً جديداً . وحتى الآن أصبح البناء شيئاً شديداً بناتجها الحساب . هناك كتب كثيرة مرموقة فى الدور الثامن عشر، ولكنها مكتوبة بلغة مفهومة فقط للذين هم معتادين على أبحاث الدور السابع عشر، وهكذا دور فدور حتى يصل الفرد للدور الأرضى وجدول الضرب .

لا يوجد على قيد الحياة من يعرف جميع الكشوف الرياضية التى تتركها مكتبات الجمعيات العلمية المختلفة فى أنحاء العالم، وعلى كل رياضى أن يكتشف لنفسه ماهى الأجزاء التى يجدها ذات فائدة فى موضعه الخاص ، والاصطلاحات الفنية ، والأفكار التى يسمح وقته بالتعرف عليها ليطبقها على مسائله الخاص .

فى هذا الباب سوف نناقش عدداً من الطرق المفيدة لهؤلاء الذين تشغلهم العلوم البحتة — الطبيعة ، الكيمياء ؛ الهندسة — ولهؤلاء الذين يستعملون أى نوع من الآلات من المثقب إلى الطائرة . ويزحف أيضاً هذا النوع من الرياضيات إلى موضوعات

مثل علم الحيوان والاقتصاديات إلى علم النفس ، وإذا لم ترغب في مثل هذه التطبيقات سوف لا تجد في هذا الباب أى نفع ولا أى مراد لتعلم حساب التفاضل بالمرّة ما لم تكن ممن يعشقون الرياضيات لذاتها . فإذا لم تستحسن ، ولم تحتاج ، إلى حساب التفاضل فإن دراسته تكون مضيعة للوقت .

في سياق البحث العلمى كثيراً ما يكون من الضروري أن توجد  $\frac{د}{دس}$  لكميات مثل ص (س) أكثر تعقيداً من أية دالة سبق لنا اعتبارها . ربما يعثر الإنسان مثلاً على كمية مثل ص  $= \left( \frac{س}{1+س^2} \right)^2$  ويرغب في معرفه ص المناظرة لها . قد أجريت هنا مجموعة كاملة من العمليات فإذا بدأنا بـ س علينا أن نحسب  $س^2$  ثم نضيف عليها واحد لتعطى  $س^2 + 1$  . حينئذ تقسم س على  $س^2 + 1$  وترفع النتيجة إلى القوة ٣ .

لقد عولجت المسألة بتفصيلها : دعنا ندخل حروف جديدة لتجرى بها هذه الحلقة من العمليات . لحساب ص اضطررنا أولاً لحساب  $س^2 + 1$  سوف نسمى هذه النتيجة الأولى ع ،  $س^2 + 1 = ع$  ما سرعه لزيادة ع ؟ إننا نعلم هذا من بحثنا السابق :  $ع = س^2$  : ثم نحسب  $\frac{د}{دس} = \frac{س}{س^2 + 1}$  (س + 1 هى نفس اشئ مثل ع) .



سمى هذه النتيجة ف بحيث تكون  $F = \frac{S}{C}$  . والآن نعلم أن  
ع تزداد بمعدل ع' وأن س تزداد بمعدل ١ تحصل على ف بقسمة س  
على ع . وحيث إننا نعرف س ؛ ع ونعرف سرعة ازدياد كل منهما  
فيجب ألا يكون من الصعب إيجاد سرعة ازدياد ف :

نفرض أننا قد تمكنا من حل هذه المسألة وأوجدنا ع' .  
تقترب الآن من المرحلة الأخير . نحصل على ص برفع ف إلى  
القوة ٣ ، أي  $V = F^3$  . ص هي  $F^2$  ، ف تزداد بمعدل  $F^2$  .  
فما مقدار سرعة ازدياد ص ؟

$$(١) \text{ إيجاد } ع' \text{ عندما } ع = S^2 + ١$$

$$(ب) \text{ إيجاد } ف' \text{ عندما } ف = \frac{S}{C} ، ع' \text{ تكون معلومة}$$

$$(ح) \text{ إيجاد } ص' \text{ عندما } ص = F^3 ، ف' \text{ تكون معلومة}$$

وحيث إنه يمكن تفتيت المسائل المعقدة بهذه الطريقة إلى  
مسائل أبسط لذلك تجد نظريات خاصة في كل الكتب الدراسة  
لحساب التفاضل تعالج تفاضل مجموع ، حاصل ضرب ، خارج  
قسمة ، ودالة الدالة . كل هذه النظريات لها غاية ، أن تمكّنك  
من إيجاد ص' المناظرة لأي علاقة مهما كانت معقدة وذلك بتفتيت  
المسألة إلى مسائل أبسط .

## تفاضل مجموع

خذ مثلاً ، ارتفاع الأسعار . إفرض أن ص هو ثمن ساعة بعد س يوم من الحرب ( مرتفعاً بمعدل ص ) ، ثمن سلسلة ( مرتفعاً بمعدل ع ) ما هو معدل إزدياد ثمن الساعة والسلسلة ؟ من الواضح أنه  $ص + ع$  . وحيث إن الثمن هو  $ص + ع$  فهذا يبين مقدار السهولة التي يمكن بها إيجاد معدل زيادة مجموع كميتين متغيرتين .

## تفاضل حاصل ضرب

نفرض أن ن هو عدد الرجال في مدينة ، ق عدد لترات الماء التي يشربها كل رجل يومياً . يكون ن ق هو العدد الكلى للترات اللازمة . فإذا كانت ن تنزايد بمعدل ن ، ق بمعدل ق ما هو سرعة إزدياد ن ق ؟ الجواب هو  $ق + ن ق$  .

## تفاضل خارج قسمة

إذا قدمنا ب برميل من الزيت إلى ن رجل ، فكل رجل سوف ينال  $\frac{ب}{ن}$  جزء من البرميل . فإذا زاد عدد الرجال بمعدل ن ، واعد

البراميل بمعدل  $\frac{ب}{ن}$  ما هي سرعة تغير  $\frac{ب}{ن}$  ؟ الجواب هو  $\frac{ب' - \frac{ب}{ن} \cdot \frac{ن'}{ن}}{ن^2}$  . لاحظ كيف أن هذا الجواب يتفق مع الواقع .

إذا كانت  $ن' = 0$  . فهذا يعنى أن عدد الرجال بقى كما هو وعندما تكون  $ب' +$  فهذا يعنى أن عدد البراميل متزايد . فى هذه الحالة  $\frac{ب}{ن}$  تكون متزايدة ، ومعدل تغيرها يجب أن يكون  $+$  وهذا يتفق مع القانون السابق . من الناحية الأخرى إذا بقى عدد البراميل كما هو أى  $ب' = 0$  . بينما كان عدد الرجال متزايد بحيث تكون  $ن' +$  يصبح القانون  $\frac{ب' - \frac{ب}{ن} \cdot \frac{ن'}{ن}}{ن^2}$  بإشارة سالبة كما يجب أن يكون .

ويبدأ نصيب كل رجل يقل ، ويكون أى تغير إلى أسوأ ، ولذا تكون الإشارة السالبة متوقعة .

### دالة الدالة

لأنه من المستحسن عند هذه المرحلة أن ترجع إلى موضوع حساب الفروق المحدودة وتقرأ مرة أخرى الكلمات التى توضح معنى أن ص

دالة في س وبالذات أن ص مرتبطة مع س بقاعدة ما . والآن  
ماذا تكون دالة الدالة ؟

اعتبر العلاقة  $ص = لو (س^2 + س)$  يمكننا عمل جدول  
ص بالطريقة الآتية : في العمود الأول ندخل الأعداد س .  
في العمود الثاني يمكننا إدخال الأعداد المناظرة  $س^2 + س$  .  
في العمود الثالث يمكننا وضع لو غاريتمات (الأساس هـ) الأعداد  
الموجودة في العمود الثاني .

يعطى هذا العمود الثالث الأعداد  $لو (س^2 + س)$  . لدينا  
س في العمود الأول ، ص في العمود الثالث . دعنا نسمى الأعداد  
الموجودة في العمود المتوسط ع . يمكن الحصول على الأعداد  
الموجودة في العمود الثاني من تلك الموجودة في العمود الأول  
بقاعدة محددة . لذا فإن ع دالة في س . ويمكن الحصول على  
الأعداد الموجودة في العمود الثالث بقاعدة محددة من تلك  
الموجودة في الثاني . لذا فإن ص دالة في ع .

إن هذه العملية هي التي ينتج عنها اسم دالة الدالة ، وفي  
الحقيقة ،  $ع = س^2 + س$  ،  $ص = لو ع$  .

الآن نعلم كل شيء عن القاعدة التي تربط س مع ع ونعرف كل شيء عن القاعدة التي تربط ع مع ص . لذا يجب ألا يكون صعباً أن نجد مقدار سرعة تزايد ص .

لأنه من الممكن أن نوضح هذا الاتصال الثنائي بواسطة آلة . ويمكن إظهار العلاقة  $E = S^2 + S$  بواسطة رسم بياني . في شكل ١٢ يمثل المنحنى و ب مجرى منحور على هيئة هذا الرسم البياني . و ١ ، و ح مجريان مستقيمان . تمثل ١ قطعة معدنية صغيرة منزلة على المجرى و ١ . و بنفس الطريقة تنزلق ب ، ح في المجرى و ح . مثبت عند ح حلقة صغيرة وخلال هذه الحلقة تمر القضبان ١ ب ، ح وهما ملتصقان مع الجزئين المنزلقين ١ ، ح بطريقة تجعل ١ ب دائماً أفقياً . فإذا تحركت ١ ، فإن ب تتحرك وهذه بدورها تلزم ح على الحركة . تمثل س المسافة و ١ ، تمثل ع المسافة و ع . وأي تغيير في س ينتج تغييراً في ع .

الآلة مصممة بحيث أن  $E = S^2 + S$  .

بنفس الطريقة يمكننا أن نوضح العلاقة  $V = L \cdot \omega$  . يمثل ص الطول و ه ، و و كما تبين ع الطول و ح . والمجرى المنحني ز و هو



الرسم البياني للدالة  $v = u$  . القضيبة  $u$  دائماً أفقي بينما  $v$  دائماً رأسي كلاهما يمر خلال الحلقة عند  $u = 0$  .

الآن يمكننا رؤية التسلسل بالكامل للعمليات إذا تغيرت  $u$  (وا) ، فإن  $v$  (و ح) لا بد وأن تتغير ولأن  $u$  و  $v$  قد تغير فإن  $v$  (ص) يجب أيضاً أن يتغير .

ما مقدار سرعة التغير ؟ إننا نعلم أن  $\frac{v}{u}$  هي معدل تزايد  $v$

بالنسبة إلى  $u$  وأن  $\frac{v}{u}$  هي معدل تزايد  $v$  بالنسبة إلى  $u$  وعلى

ذلك فإن معدل تزايد  $v$  بالنسبة إلى  $u$  هو  $\frac{v}{u} \cdot \frac{u}{u}$  أي أن

$$\frac{v}{u} = \frac{v}{u} \cdot \frac{u}{u}$$

يعطى هذا نظرية عن دالة الدالة ومعدل تغيرها .

إنه من السهل في مثالنا بالذات أن نوجد  $\frac{v}{u}$  . إذ علينا إيجاد

$\frac{v}{u}$  ، ثم حاصل ضربهما . ليس هناك أية صعوبة مع  $\frac{v}{u}$

حيث أن  $v = u^2 + u$  فإن  $\frac{v}{u} = \frac{u^2 + u}{u} = u + 1$  . والآن

لإيجاد  $\frac{ص}{ع}$  حيث  $ص = لو ع$ . رأينا في الباب الحادى عشر

أن لو س تتزايد بمعدل  $\frac{1}{س}$ . و يتزايد اللوغاريتم الطبيعى لآى عدد

بمعدل يساوى مقلوب هذا العدد، وليس هناك أى فرق إن سمينا

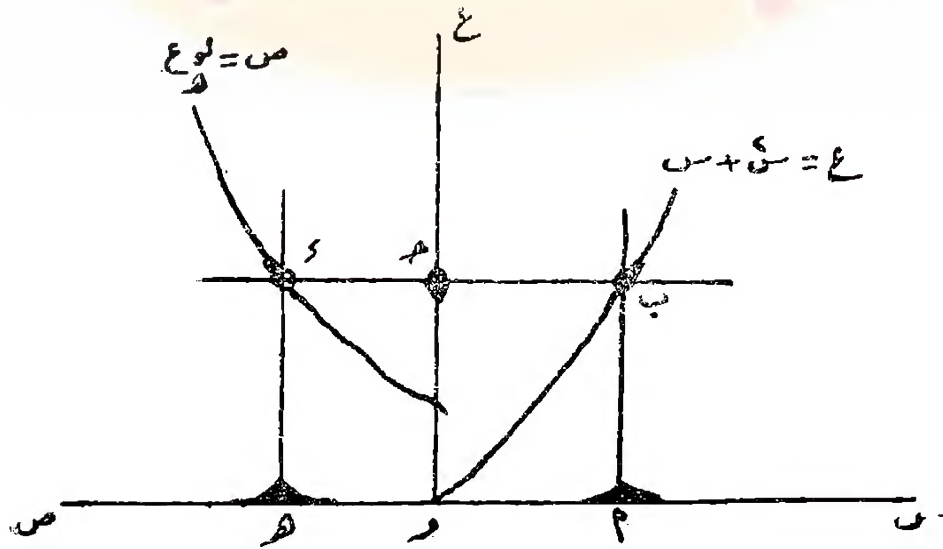
العدد ع أو س لذلك فإن  $\frac{ص}{ع} = \frac{1}{ع}$  تبعاً لذلك فإن  $\frac{ص}{ع} = \frac{1}{س}$

$$\frac{1}{ع} = (٢ س + ١)$$

ولكن اختصار للعدد  $س^٢ + س$  الموجود فى العمود الثانى

وعلى ذلك يكون الجواب مساوياً  $\frac{٢ س + ١}{س^٢ + س}$  وهذا هو حل

المسألة .



( شكل ١٢ )

بتجميع النتائج المذكورة سابقاً يكون من الممكن إيجاد  $\frac{v}{u}$   
لعلاقات أكثر تعقيداً .

### النظام

لقد اعتبرنا من قبل موضوع التفاضل — أى عملية إيجاد  
السرعة  $v$  لجسم يتحرك بطريقة يعبر عنها بعلاقة مع  $v$  .  
كثيراً ما تحدث العملية العكسية : هذا هو موضوع التكامل .  
لسنا فى حاجة بالطبع أن نعتبر أن  $v$  هى سرعة جسم متحرك .  
إنها تمثل معدل تغير  $v$  مهما كانت  $v$  . إنه من السهل مثلاً أن  
تكشف ازدياد الضغط كلما إزداد الغاطس عمقاً فى البحر . لذلك  
يمكن أن تمثل  $v$  الضغط على خوزة الغاطس بالقدم المربعة  
عندما يكون على عمق  $s$  قدماً . إنه من السهل الحصول على معدل  
التزايد  $v$  . ولكى توجد  $v$  يجب أن نحل مسألة التكامل (إنها  
سهلة جداً فى هذه الحالة بالذات .)

أيضاً يستعمل التكامل عند إيجاد ضغط الهواء على ارتفاعات  
مختلفة ، وهو موضوع ذو نفع لمنساقى الجبال ، وللطيارين ولخبراء  
الطقس ولغيرهم . وهناك فروع قليلة ؛ إن وجدت ، فى العلوم  
والهندسة لا يظهر فيها موضوع التكامل . فى معالجة أية مسألة

عملية على الطالب أن يفعل شيئين : أولاً يجب أن يضع المسألة في قالب رياضي ، ثم بعد ذلك يجرى العمليات الرياضية اللازمة لحل المسألة : ولا فائدة من هذا العمل الأخير بغير العمل الأول وعلى ذلك فدراستنا للتكامل سوف يكون لها غرضان :

- ( ١ ) أن نتفهم طبيعة التكامل بوضوح بحيث نتعرف بسرعة على أية مسألة يمكن حلها بواسطة التكامل  
( ب ) أن نتمكن من الطريقة الرياضية .

يمكن تفهم الجزء الأول ( ١ ) ولو أننا سوف نرجع إلى ( ب ) رجوعاً عابراً .

سوف نعتبر مسألة بسيطة للغاية مسألة يمكن حلها رياضياً في سطرين — وسوف نفحصها من جميع الوجوه : سوف نطبق على هذه المسألة البسيطة طرقاً كافية بحل مسائل أصعب منها بكثير . في الحقيقة سوف نستعمل مطارق بخارية لنفتت بها أجسام صلبة سوف لا يكون الغرض من ذلك تفتت الأجسام الصلبة ولكن لنبين كيف تعمل هذه المطارق البخارية . إن مسألتنا البسيطة هي كالآتي :  
إذا كانت  $v = s$  أوجد العلاقة مع  $v$  . هذه المسألة في وضعها الحالي ليست كاملة تماماً . لدينا  $v$  التي يمكن أن تمثل سرعة جسم بعد  $s$  ثانية . ومن الواضح أنه يجب أن نعرف من أين بدأ الجسم إذا طلب منا تعيين موضعه . لذلك سوف نفرض

أنا نعلم أن ص = . عند س = . المسألة الآن محددة تماما .  
ويمكننا أن نعتبر ص على أنها بعد الجسم عن نقطة ثابتة ق .  
ولنبداً بالجسم عند ق حيث إن المسافة ص تساوى صفراً  
في البداية . ثم يبدأ الجسم بعد ذلك في الحركة فتكون سرعته بعد  
ثانية واحدة قدماً واحدة في الثانية ، وبعد ثانيتين تكون سرعته  
قدمين في الثانية وهكذا . إن السرعة لا تزيد طفرة واحدة ولكن  
بانتظام . ذلك لأن ص = س تخبرنا بأن السرعة تكون  $\frac{1}{8}$  قدم/  
ثانية بعد  $\frac{1}{8}$  ثانية ، وتكون  $\frac{1}{4}$  قدم / ثانية بعد  $\frac{1}{4}$  ثانية وهكذا .  
لدينا الآن صورة كاملة عن الحركة .

### طريقة: الألفاظ التقريرية

دعنا نحاول أولاً وقبل كل شيء الحصول على فكرة تقريرية  
عن المسافة التي يقطعها الجسم، مثلاً ، في الثانية الأولى . سوف نقسم  
الثانية إلى عشرة أجزاء متساوية ، ونرى مقدار ما يمكن أن نعرفه  
عن المسافة التي يقطعها الجسم في كل عشر ثانية . في العشر الأول  
من الثانية يتحرك الجسم بسرعة تتزايد بانتظام من صفر البداية  
إلى ١ و . عند النهاية . وعلى ذلك تقع السرعة المتوسطة بين ١ و .  
وتكون المسافة المقطوعة أكبر من صفر مضروباً في ١ و . ولكن



أقل من ١٠ مضرورياً في ١٠ . يمكننا أن نطبق نفس الطريقة على كل من الأجزاء الأخرى . المسافة المقطوعة أى ١٠ . من الثانية أكبر من ١٠ مضرورياً في أقل سرعة وأقل من ١٠ مضرورياً في أكبر سرعة في أثناء هذا الجزء . ويمكننا أن نضع ذلك في جدول .

### جدول ١٤

#### المسافة المقطوعة

الزمن	أقل سرعة	أكبر سرعة	على الأقل	على الأكثر	الفرق
صفر إلى ١٠	صفر	١٠	صفر	١٠	١٠
١٠ إلى ٢٠	١٠	٢٠	١٠	٢٠	١٠
٢٠ إلى ٣٠	٢٠	٣٠	٢٠	٣٠	١٠
٣٠ إلى ٤٠	٣٠	٤٠	٣٠	٤٠	١٠
٤٠ إلى ٥٠	٤٠	٥٠	٤٠	٥٠	١٠
٥٠ إلى ٦٠	٥٠	٦٠	٥٠	٦٠	١٠
٦٠ إلى ٧٠	٦٠	٧٠	٦٠	٧٠	١٠
٧٠ إلى ٨٠	٧٠	٨٠	٧٠	٨٠	١٠
٨٠ إلى ٩٠	٨٠	٩٠	٨٠	٩٠	١٠
٩٠ إلى ١٠٠	٩٠	١٠٠	٩٠	١٠٠	١٠
المجموع			٤٥٠	٥٥٠	١٠٠

في العمود الأول لدينا الأجزاء العشرية التي قسمت إليها الثانية

الأولى . ثم يتبعها أقل سرعة وأكبر سرعة في كل جزء من الحركة .  
ولدينا بعد ذلك عمودان يبينان ٠.١ مضروباً في أقل سرعة ، ٠.١ .  
مضروباً في أكبر سرعة . ففي كل عشر ثمانية يقطع الجسم مسافة أكبر  
من التي تقطع في العشر السابق وأقل من التي تقطع في العشر التالي .  
ويبين العمود الأخير الفرق بين العمودين السابقين فمثلاً ، نعلم أنه  
في الفترة بين ٠.٦ ، ٠.٧ . يقطع الجسم مسافة على الأقل ٠.٠٦ . وعلى  
الأكثر ٠.٧ . الفرق بينهما ٠.١ . وبذلك نكون غير واثقين من  
صحة المسافة المقطوعة في أثناء هذه الفترة إلى مدى واحد من المائة .  
ويمكن أن نحصل بالجمع على المسافة الكلية المقطوعة في الثانية  
الأولى ، وهي أكبر من ٠.٥ ، قدم وأقل من ٠.٦٥ ، قدم .

لدينا الآن فكرة تقريبية عن مقدار ما يقطعه الجسم في  
الثانية الأولى . الفرق بين ٠.٤٥ ، ٠.٥٥ . هو ٠.١ . ينتج هذا الخطأ  
٠.١ من خطأ مقداره ٠.١ . في كل من العشرة صفوف . فإذا رغبتنا  
في نتيجة أكثر دقة سوف يكون من الضروري أن نقوم بنفس  
العمل مستعملين فترات أصغر . فمثلاً يمكننا أن نقسم الثانية  
الواحدة إلى ١٠٠ جزء ثم نقوم بعملية حسابية مشابهة ، ولأنه بالطبع  
سوف يكون أداء ذلك طويلاً ومعقلاً . بأية درجة سوف تقربنا  
مثل هذه الطريقة للنتيجة الصحيحة ؟ سوف يكون الفرق بين أكبر  
وأصغر سرعة في جزء صغير ٠.٠١ بدلاً من ٠.١ . ويمكن الحصول على

المسافة المقطوعة في ٠.١ من الثانية بضرب السرعة في ٠.٠١ .  
وبذلك سوف يكون الخطأ في المسافة المقطوعة في جزء من المائة  
من الثانية ٠.١ — أى ٠.٠٠١ . ولكنه سوف يكون هناك مائة  
صف في الجدول (بدلاً من عشرة) فيكون الخطأ في المسافة الكلية  
١٠٠ ضعف ٠.٠٠١ ، أى ٠.١ ( في الحقيقة كان يجب أن نثبت  
أن المسافة كانت أكبر من ٤٩٥ ، وأقل من ٥٠٥ ) . تكون  
درجة الجودة لهذه النتيجة عشرة أضعاف المرة السابقة ، لقد  
حصلنا على ذلك نتيجة لعملنا الذي زاد إلى عشرة أضعاف . وإذا  
أخذنا فترات أكثر يمكننا الحصول على نتائج أحسن .

تستعمل هذه الطريقة فقط عندما تكون المسألة من الصعوبة  
بدرجة لا تجدى معها أية طريقة أخرى . حتى في هذه الحالة يجب  
أن نختصر خطوات العمل . لم تعط هذه الطريقة كوسيلة مثلى  
للحصول على الجواب الحقيقي ، ولكن لكي تبين ما تقصده  
المسألة . سوف تساعدك الطريقة السابقة على أن تتفهم الرمز  
المستعمل للتكامل .

لقد استعملنا قبلاً  $\Delta$  س رمزاً للتخمين في س . ففي الجدول  
السابق مثل كل صف في العمود الأول تغييراً مقداره ٠.١ ، فنلاحظ  
٠.٧ إلى ٠.٨ . يعطى العمودان التاليان أصغر سرعة وأكبر سرعة

أى أنهما يساعداننا على معرفة مقدار السرعة ص- في أثناء هذه الفترة من الزمن . وبنفس الطريقة يعطى العمودان الرابع والخامس عدداً أقل وعدداً أكبر من المسافة المقطوعة في أثناء أية فترة صغيرة من الزمن . وحيث إن ص- مضروبة في الزمن الذى يمضى في  $\Delta$  س تقيس المسافة المقطوعة ، فإنه يمكننا أن نعتبر هذه الأعمدة وكأنها تمثل ص'  $\Delta$  س .

بالطبع هناك بعض الشك حول معنى ص- : فمثلاً عندما تتغير س من ٠,٦ إلى ٠,٧ . تتغير ص- أيضاً من ٠,٦ إلى ٠,٧ . وتكون قيمة ص- غير واضحة فإما تساوى ٠,٦ ، وإما ٠,٧ ، وإما عدداً ما بينهما . وبسبب عدم التأكد هذا ، نأخذ عمودين أحدهما تحت عنوان « على الأقل » والآخر « على الأكثر » .

يمكننا بعد ذلك تقدير الساعة المقطوعة في كل الثانية الأولى بجمع العمودين الرابع والخامس وبذلك يكون مجموع ص-  $\Delta$  س على الأقل ٠,٤٥ . وعلى الأكثر ٠,٥٥ .

لدينا الآن تقديران ، أحدهما صغير جداً والآخر كبير جداً . ولكن لحسن الحظ عندما نأخذ فترات أصغر من الزمن أى باتخاذ  $\Delta$  س ٠,١ أو ٠,٠١ ، إلخ يصغر الفرق بين هذين

التقديرين إلى درجة كبيرة . وفي عبارة أخرى إذا أخذنا  $\Delta$  س صغيرة جداً فإنه لا يهمنا كثيراً إذا أخذنا ص - أكبر أو أصغر سرعة تحدث في فترة الزمن  $\Delta$  س . سوف يكون الجواب واحداً في كلتا الحالتين . وإذا لم يكن كذلك فعلينا إدخال رمز جديد مثل ص'  $\Delta$  س ( ل ) ليعني « أقل سرعة » ، ص' مضروبة في التغير في س ،  $\Delta$  س . وحيث إن الحالة ليست هكذا فإن ذلك يكون مضيقاً للوقت . إن أقل سرعة وأعلى سرعة يعطيان نتائج تقرب من بعضها جداً كلما صغرت  $\Delta$  س

ذكرنا في الباب العاشر أن  $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$  يزداد إقترابها من عدد

معين كلما صغرت  $\Delta$  س . سمي هذا العدد  $\frac{\text{و}}{\text{و س}}$

بنفس الطريقة ، يمكن تمثيل العدد الذي كنا نوجد قيمة ، وهو أكبر من ٠.٤٠ وأقل من ٠.٥٥ ، أكبر من ٠.٤٩٥ وأقل من ٠.٥٠٥ . إلخ بالمقدار ' | ص' و س . والرمز | هو الحرف S الموجود في كلمة sum . ويبين الرمز أنه يمكن إيجاد العدد بضرب ص' في  $\Delta$  س لكل فترة وجيزة من الزمن ، ثم بعد ذلك نجمع



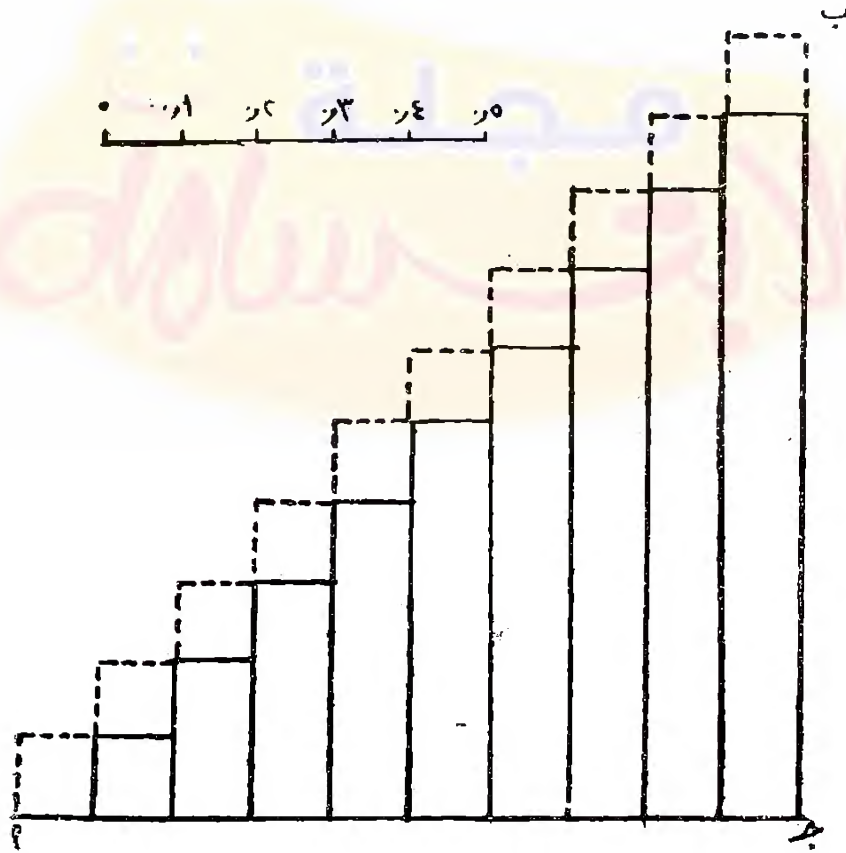
هذه الكميات ونلاحظ ما يحدث عندما  $\Delta s$  تصغر جداً . ولقد أدخل العدادان ٠ ، ١ لكي نبين أن المسافة قطعت خلال الثانية الأولى أى بين  $s = ٠$  ،  $s = ١$  . بمعنى آخر يجب أن نقسم التغير في  $s$  من ٠ إلى ١ إلى كميات صغيرة  $\Delta s$  كما في العمود الأول من الجدول . وتمثل  $\left| \begin{smallmatrix} \text{ص} \\ \text{و} \end{smallmatrix} \right|$  المسافات المقطوعة في الفترة الزمنية ما بين ثانيتين إلى ٥ ثوان بعد البداية . يمثل  $\left| \begin{smallmatrix} \text{ص} \\ \text{و} \end{smallmatrix} \right|$  المسافة المقطوعة في أول ن ثانية وحيث إننا قد افترضنا أن  $\text{ص}$  تعطى الصيغة  $\text{ص} = s$  فإنه يمكن وضع  $s$  بدلا من  $\text{ص}$  فتكتب  $\left| \begin{smallmatrix} \text{و} \\ \text{و} \end{smallmatrix} \right|$  . مما سبق يبدو من المحتمل أن الذى نبحث عنه هو العدد ٥ . ويمكن إثبات أن ذلك هو الجواب الصحيح بالرمز ،  $٥ = \left| \begin{smallmatrix} \text{و} \\ \text{و} \end{smallmatrix} \right|$  . وتعرف  $\left| \begin{smallmatrix} \text{و} \\ \text{و} \end{smallmatrix} \right|$  بأنها علامة التكامل .

يقصد بالنكامل عملية تجميع وإنى أعتقد أن الاسم قد اختير لأن العملية تتكون من تجميع مجموعة من الكميات الصغيرة ، جميع التغيرات الصغيرة في  $s$  التى حدثت فى لحظات الزمن القصيرة الماضية .

## طرق فهم النظام

إنه من المفيد أن تعرف طرق مختلفة تعطى نفس النتيجة .  
حيث يمكن في أية مسألة اختيار الطريقة الأكثر ملائمة .

يمكن تعريف الرمز  $\left[ \begin{smallmatrix} s & s \end{smallmatrix} \right]$  بأنه المسافة المقطوعة في  
الثانية الأولى لجسم سرعته دائماً مساوية لعدد الثواني التي مرت  
( باحتساب كسور الثانية ) .



( شكل ١٣ )

لكن نبين مثل هذه الحركة يمكننا استعمال الطريقة المبدئية في بداية الباب الحادى عشر . إنه سوف يكون من الصعب أن نجعل السرعة ص - دائماً مساوية تماماً لعدد الثوانى س . دعنا مرة أخرى نفتتح بطريقة تقريرية . دع سن القلم خلال عشر الثانية الأول يبقى ساكناً فى الفتحة ١ ب . وخلال عشر الثانية التالى دعه يتحرك لأعلى بسرعة ١,٠ قدم فى الثانية : دع السرعة من س = ٢,٠ إلى س = ٣,٠ تكون ٢,٠ قدم فى الثانية وهكذا .

فى الحقيقة دع السرعة خلال أية فترة معطاة فى العمود الأول جدول ١٤ تكون مساوية للعدد المعطى فى العمود الثانى لذلك الجدول . سوف يتكون الرسم البيانى الناتج من خطوط مستقيمة متصلة ببعضها على شكل سلسلة . وكما رأينا فى الباب الحادى عشر ، تقيس ص - انحدار هذه الخطوط . وحيث إن ص - تزيد بانتظام سوف يكون كل خط أكثر انحداراً من الذى يسبقه . وبذلك فقد كان من الممكن أن نوضح عملية التكامل إذا طلبنا أن نرسم منحني معلوماً انحداره عند كل نقطة .

يمكن أيضاً إيضاح جدول ١٤ مباشرة إذ يمكن الحصول على الأعداد الموجودة فى العمود الرابع بضرب تلك الموجودة فى العمود الثانى فى ١,٠ . ولكن يمكن تمثيل عملية الضرب ، مثلاً ٩,٠ فى ١,٠ ، بمساحة مستطيل أضلاعه ٩,٠ ، ١,٠ كما يمكن تمثيل

الأعداد العشرة الموجودة في العمود الرابع بمساحة عشرة مستطيلات كما في شكل ١٣ . مجموع هذه الأعداد ٤٥٠ ، يمثل المساحة الكلية الموجودة أسفل الخط المتصل في نفس الشكل تمثل المساحة أسفل الخط المتقطع ٥٥٠ وهو مجموع الأعداد الموجودة في العمود الخامس .

يوجد بين الخطوط المتقطعة والخطوط المتصلة عشرة مربعات . كل منها مساحته تساوي ١٠٠ ، تمثل هذه المربعات الأعداد الموجودة في العمود الأخير .

إننا نعرف أن  $\left\lfloor \frac{s}{s} \right\rfloor$  تمثل عدداً أكبر من المساحة الموجودة أسفل الخط المتصل ، وأقل من المساحة الموجودة أسفل الخط المتقطع . باتخاذ ١٠٠ خطوة بدلاً من عشر خطوات نحصل على نتيجة أحسن للعدد الذي نريده . ولكن ههنا ~~هنا~~ عدد الخطوات فإن الخط المتصل دائماً يقع أسفل الخط المستقيم  $ab$  والخط المتقطع يقع فوقه . فإذا رسمنا الخط  $ab$  فإن مساحة المثلث  $abc$  تكون دائماً أكبر من المساحة أسفل الخط المتصل ، وأقل من المساحة أسفل الخط المتقطع . في الحقيقة المساحة  $abc$  تساوي العدد الذي نبحث عنه ،  $\left\lfloor \frac{s}{s} \right\rfloor$  .

هذه النتيجة عامة فإذا كانت  $d(s)$  أية دالة في  $s$  فإن

١ | د (س) و س يمثل دائما المساحة أسفل الرسم البياني للدالة  
د (س) بين  $s = 1$  ،  $s = 2$  . إن مسألة إيجاد مساحة  
داخل منحنى هي مسألة تكامل يجب أن تحاول بنفسك أن ترسم  
المساحة التي تمثل ١ |  $s^2$  و س . العلاقة بين التكاملات  
والمساحات مفيدة من ناحيتين : أولا : يمكننا استعمال المساحة لكي  
توضح معنى التكامل ولكي تساعدنا على تفهم طبيعة التكاملات .  
ثانياً : يمكننا الحصول على القيمة الحقيقية لمساحة معينة بحساب  
قيمة التكامل .

### طرق مختصرة

يمكن إيجاد قيمة التكامل ١ |  $s^2$  و س بمجهود قليل جداً .  
لقد بدأنا المسألة بمحاولة إيجاد ص بحيث تكون  $s = 2$  ،  
 $s = 0$  عندما  $s = 0$  . ( انظر صفحة ٣١٠ ) .

ولكننا نعلم أن السرعة  $s = 2$  س تناظر العلاقة  
 $s = s^2$  ،  $s = 2$  هي بالضبط ضعف ما نريده لقيمة  $s = 0$  .  
ويمكننا تصحيح ذلك باتخاذ نصف مقدار  $s$  ، أى باعتبار  
الصيغة  $s = \frac{1}{2}s^2$  . وهذه تعطى تماماً القيمة الصحيحة ،



ص = س . أيضاً  $\frac{1}{s} = s^2$  تساوى صفراً عند س . . وهذا يحقق الشرط ص = س . عند س = . . ولذلك فإن ص =  $\frac{1}{s} = s^2$  هي العلاقة التي نبحث عنها . إنها تعطي المسافة ص المناظرة إلى س ثانية . بوضع س = 1 نجد ص =  $\frac{1}{s} = 1$  . ولذا فإن المسافة المقطوعة في ثانية هي  $\frac{1}{s} = 1$  . هذه تتفق مع النتيجة هـ . التي أوجدناها بالطريقة الأخرى .

يمكن حل الكثير من مسائل التكامل بهذه الطريقة . الفكرة في غاية البساطة . لقد تعلمنا قبلاً كيف نوجد ص' المناظرة للصور المختلفة الكثيرة للدالة ص . والآن المطلوب حل المسألة العكسية : ص' هي المعطاة والمطلوب إيجاد ص . إنه من الطبيعي أن نرجع إلى ما ذكرناه عن المسألة الأولى فإذا وجدنا ضمن ذلك صورة ص' المطلوبة فإنه يمكن حل المسألة في الحال . فمثلاً : لقد أوضحنا أن ص =  $\frac{1}{s}$  لو س تناظرها ص' =  $\frac{1}{\frac{1}{s}} = s$  . فإذا طلب منا أن نوجد  $\left[ \frac{1}{s} \right]$  دس فهذا تماماً مثل قولنا : إذا كانت ص' =  $\frac{1}{s}$  فما هي ص ؟ من الواضح أن ص =  $\frac{1}{\frac{1}{s}} = s$  تعطي جواباً لهذا السؤال . الجواب الكامل سوف يتوقف على شرط

آخر أنه ليس بكاف أن تعرف مقدار سرعة جسم يتحرك بل على الإنسان أن يعرف أيضا مكانه عند لحظة ما .

### المعادلات التفاضلية

يؤدي عدد كبير من المسائل العملية إلى ما هو معروف بالمعادلة التفاضلية . يمكن أن نفهم جيدا ماهية المعادلة التفاضلية بالنظر إلى المثال الآتي :

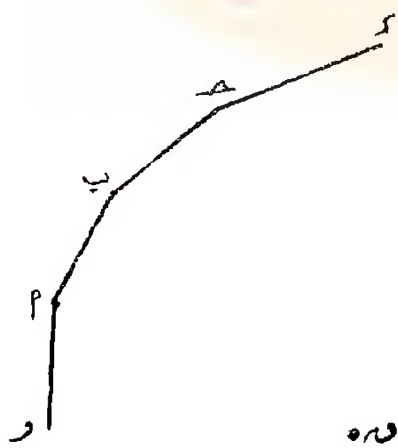
ينتشر الضوء من مصباح كهربائي في جميع الاتجاهات بدرجة واحدة ، وكثيراً ما يكون هذا غير مرغوب فيه — كما هو الحال عند عمل كشاف : إننا نفضل أن يكون الضوء كله في اتجاه واحد ، وهذا يتم بوضع عاكس خلف المصباح . فإذا خرج الضوء المنعكس في حزمة كالة . ما هي الصورة التي يجب أن يكون عليها العاكس ؟

إنه من المعلوم كيف ينعكس الضوء عندما يسقط على مرآة إذا أخذنا الحرف  $\gamma$  ووضعنا تحته خط هكذا  $\underline{\gamma}$  يكون لدينا صورة تقريبية عما يحدث . الخط يمثل المرآة ، والذراع الأيسر للحرف  $\gamma$  يمثل الضوء الساقط على المرآة ، والذراع الأيمن يمثل الضوء

المرتد من المرآة . يجب أن يصنع زراعا الحرف  $\gamma$  نفس الزاوية مع خط المرآة . ترتد كرة البلياردو تقريبا بنفس الطريقة إذا لم يكن هناك دوران .

سوف لا تحصل على حزمة متجمعة إذا وضعنا مرآة مستوية عادية خلف المصباح إذ يتفرق الضوء المنعكس في اتجاهات مختلفة كما يتضح ذلك بيانيا .

يمكننا أن نحاول المسألة باتخاذ عدد كثير من قطع المرايا الصغيرة محاولين وصلها في شكل سلسلة ما بحيث نحصل على حزمة مناسبة في شكل ١٤ تمثل  $u$  النقطة التي يوضع عندها المصباح الكهربائي (و) نقطة ما أخرى . ويراد الحصول على حزمة ضوئية في الاتجاه  $u$  . يمثل  $u$  قطعة صغيرة من المرآة موضوعة بحيث إن



( شكل ١٤ )

الضوء الصادر من  $u$  ملاقيا المرآة عند (و) ينعكس في اتجاه الخط  $u$

وبالطبع الضوء الصادر من  $u$  ملاقيا المرآة بين  $u$  و  $u$  ينعكس منحرفا إلى أعلى قليلا بعيدا عن  $u$  ولكن إذا كان الطول  $u$  قصيرا



مثلا يمكن لسفينة في البحر أن تتجه نحو فنار . يمكنها أن تبدأ من أى مكان تشاء . ولكن بمجرد أن تبدأ يجب تعيين الاتجاه الذى يجب أن تسير فيه . يمكن اعتبار الفنار وكأنه مغناطيس يجذب السفينة : وبلغة المغناطيسية تسير السفينة في أحد خطوط القوى . إنه يمكن للمسألة أن تكون أكثر تعقيدا إذا كان هناك مغناطيسان يجذب كل منهما جسما متحركا . حينئذ لا يكون مسار الجسم واضحا كما في حالة السفينة والفنار . لذلك فإن المعادلات التفاضلية تظهر مع نظرية الكهرباء والمغناطيسية .

كيف تبدو المعادلة التفاضلية برموز جبرية ؟ لدينا قاعدة ما ، تعطينا إتجاه المنحنى عند أية نقطة . ويمكننا أن نقول أيضا إن لدينا قاعدة تعطى انحدار المنحنى عند أية نقطة . يقاس انحدار المنحنى بواسطة ص . ويتعين موضع أية نقطة على رسم بياني بواسطة العددين س ، ص . ولكل نقطة يوجد اتجاه يناظرها : يمكننا أن نتخيل هذا إذا فرضنا أن ورقة الرسم البياني مغطاة بأشبههم صغيرة ولافتات عليها الرسالة الآتية : « إذا وصلت إلى هذه النقطة ارحل في هذا الاتجاه » وباستمرار تتبع اللافتات يمكن الفرد أن يتبع أى منحنى .

وتتظم اللافتات طبقاً للقاعدة : إذا كانت لدينا أية نقطة مناظرة



لأى عدد  $s$  ،  $v$  فهناك قاعدة تعطى اتجاه اللافئة إذ يقاس  
 انحدار السهم بواسطة  $v$  ، وهناك أيضاً قاعدة معينة تعطى  $v$  ،  
 أى أن هناك قانوناً يعطى  $v$  عندما تكون  $s$  ،  $v$  معلومتين.  
 فمثلاً إذا وضع فنار عند ( . ، . ) فإن جميع السفن تبهر  
 متجهة نحوه وتكون الصيغة  $v = \frac{v}{s}$  . لأن  $\frac{v}{s}$  هو ميل  
 المستقيم الذى يصل أية نقطة (  $s$  ،  $v$  ) بالنقطة ( . ، . ) ،  
 وهذا يساوى  $v$

سوف لا يكتفك تتبع هذه المناقشة إذا لم تكن الهندسة التحليلية  
 وألوفة لديك : يجب أن تتمكن من مبادئ الهندسة التحليلية  
 ( تعيين النقط ، ميل الخطوط المستقيمة ، الزوايا بين الخطوط  
 المستقيمة ، المسافة بين نقطتين ، معادلة الدائرة ) قبل أن تحاول  
 أن تتعلم نظرية المعادلات التفاضلية .

## أمثلة

لم تكن معالجة الموضوعات فى هذا الباب كاملة حتى تبهر  
 وضع نماذج وسوف يجد القراء الذين تمكنوا من تتبع الفكرة  
 العامة لهذا الباب نماذجاً فى الكتب الدراسية لحساب التفاضل  
 والتكامل .

## الباب الثالث عشر

### حساب المثلثات

أو كيفية حفر الأنفاق ورسم الخرائط

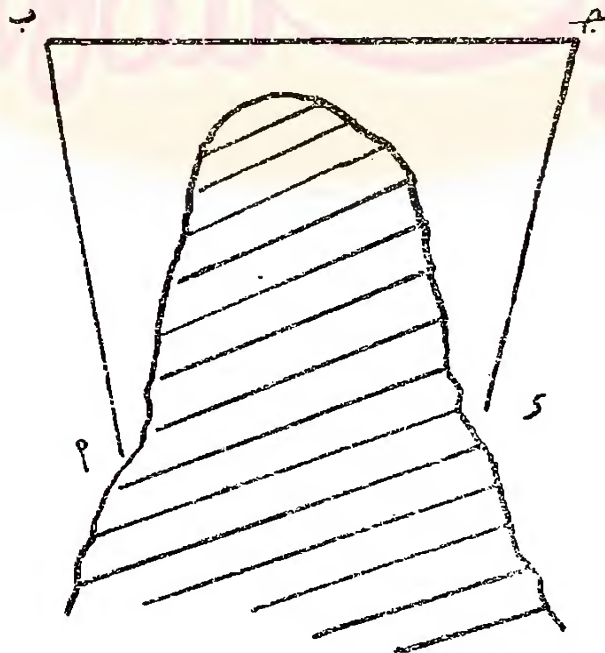
• يجب اتخاذ أقصى احتياطات ممكنة لتجنب الأخطاء . ويبين ذلك الدقة المتناهية التي تتخذ عند حفر الأنفاق ... فعند تصميم نفق Muscontcony الذي يبلغ طوله ٥٠٠٠ قدم كان الخطأ صغيراً جداً أما في نفق Hoosac الذي يبلغ طوله ٢٥٠٠٠ قدماً فكان الخطأ لا يكاد يذكر ،  
أ . ويليمز

لقد حاولت في هذا الكتاب أن أبين :

- ( أ ) أنه يمكن دراسة المسائل الرياضية بلغة سهلة .
- ( ب ) أنه يمكن لأي فرد عادي أن يفكر بنفسه في هذه المسائل مستعملاً المنطق السليم .
- ( ح ) أن الطرق المبيّنة في الكتب الدراسية إنما تمثل ببساطة التحسينات التي أدخلت على المحاولات الأولية التي قد بنيت تدريجياً بفضل أجيال من علماء الرياضة .

لكي نوضح هذا لا يوجد أفضل ، في أى جزء من الرياضيات ، من حساب المثلثات . يظهر حساب المثلثات في مسائل عملية بسيطة للغاية ، كبناء نفق سكة حديدية مثلاً وربما كان من الضروري عمل نفق يمتد بعيداً لأميال عديدة عبر سلسلة من الجبال ، إلى نقطة لا يمكن من جانبنا أن نراها . وأحياناً يكون من الضروري حفر النفق من كلا النهايتين ليتقابلتا في نقطة ما بعيدة داخل الجبل . كيف يمكن إيجاد الاتجاه الصحيح الذي نبدأ فيه الحفر ؟

شكل ١٥ يوضح إحدى الطرق المشروحة في الباب الرابع من كتاب السكة الحديدية لمؤلفه أ. ب. شيلدروب . يمثل الجزء المظلل أرضاً مرتفعة . والمطلوب أن نصل ما بين النقطتين ١ ، ٥ بنفق .



(شكل ١٥)

ربما كان من الممكن تعيين نقطتين مثل ب ، ح بحيث يمكن رؤية ب من ا ، ح من ب ، د من ح ونقيس بعناية طول واتجاه الخطوط ا ب ، ب ح ، ح د .

تكفي هذه البيانات لتعيين موضع د . إنها سوف تمكننا من عمل خريطة للمنطقة تبين ا ، ب ، ح ، د بمقياس قدماً واحدة مثلاً للميل

نبدأ من ا ونرسم الخطوط من ا إلى ب ، من ب إلى ح ، من ح إلى د في الاتجاهات المناسبة وبنفس مقياس الرسم . وهكذا نعين د . وعلى الخريطة يمكن أن نرسم الخط ا د وأن نقيس الزوايا التي يصنعها مع ا ب ، ح د وبذلك نعرف في أى الاتجاهات نبدأ الحفر عند ا ، د .

تبين هذه الطريقة أنه يمكن حل المسألة بطريقة منطقية سليمة ولو أنها ليست متقنة تماماً حيث إننا نعمل بمقياس رسم قدم واحدة للميل فأى خطأ مقداره  $\frac{1}{32}$  من البوصة فى رسمنا يؤدي إلى خطأ  $\frac{1}{4}$  ياردة على الطبيعة . وفى أثناء رسم الشكل من السهل الوقوع كثيراً فى مثل هذه الأخطاء . لذلك فإن رسم الشكل ليس كافياً لكي يعطى نتائج مضبوطة . ولكن لكي يعطى فكرة عامة عما يحتاج إليه . وفى العادة تبين المحاولات الأولى نشأة الفكرة . ثم علينا أن ننمىها حتى تصبح عملية . تمر الاكتشافات الرياضية

بنفس المراحل التي تمر بها الاكتشافات الميكانيكية : أولا فكرة ثم لعبة ثم غرض تجارى .

يمثل حساب المثلثات محاولة لتحسين طريقة الرسم . إن المحاولة تجرى بالطريقة الآتية : برسم الخريطة بمقياس أكبر يمكننا الحصول على إجابة أكثر إتقاناً لمسألة النفق . لكن يبدو أنه ليس هناك حداً لدرجة الإتقان التي يمكن الحصول عليها بتكبير الرسم . يمكننا الحصول ( بالرسم بمقياس كبير ) على طول واتجاه  $\alpha$  و بدرجة كبيرة من الدقة إذا حصلنا على أطوال واتجاهات الخطوط  $\alpha$  ،  $\beta$  ،  $\gamma$  ،  $\delta$  و بدرجة مماثلة من الدقة .

يبدو أنه من المحتمل وجود قاعدة ما تربط النتائج مع الحقائق المعطاة . يمكننا جمع معلومات عن المسألة بإتخاذ  $\alpha$  ،  $\beta$  ،  $\gamma$  ،  $\delta$  في مواضع مختلفة . ثم نحاول أن نلاحظ الطريقة التي يعتمد بها طول واتجاه  $\gamma$  على القياسات الأخرى المعطاه . سوف يكون الغرض إيجاد قاعدة : وبمجرد حصولنا على هذه القاعدة يمكننا من حساب  $\alpha$  و بآية درجة من الدقة نريدها بدون الاستعانة برسم ما .

لذلك يمكن في حساب المثلثات أن تعتبر أن المسائل التي يمكن حلها بالرسم مسائل ذات إجابات محددة . (إنه مضيعة للوقت أن نحاول في حساب المثلثات أية مسألة إذا لم تكن قد أعطيت البيانات التي تمسكك من حلها بالرسم : إن حساب المثلثات



ليس سحراً) : أولا سنحاول أن نكشف القاعدة التي تعطى هذا الجواب بحيث نكون قادرين أن نستنتج الجواب بقانون بدلا من الرسم . الغرض إذن هو استبدال الرسم بالحساب .  
مثل هذا الموضوع يمكن حله عمليا في المرحلة الأولى فقط .  
فالأطوال والاتجاهات أشياء حقيقية تتبع قوانين خاصة بها .  
وبملاحظتها يمكننا استنتاج خواصها .

ولكن بالطبع سوف نبدأ بإجراء تجارب على مسألة النفق والنقط الأربع ا، ب، ح، د . وليس من الحكمة في شيء أن نحاول مباشرة مسألة من طابع جديد . بل من المستحسن أن نحاول مسألة أكثر بساطة ولكن من نفس الطابع ، أجر تجاربك عليها ، وانظر إذا كانت الطريقة التي تحل المسألة البسيطة تلقى ضوءا على المسألة المعقدة . في رسم الخرائط أبسط المسائل هي المتعلقة بثلاث نقط فقط ( ومن ثم سمي حساب المثلثات أى علم الثلاثة مستقيمت ) . كما إن من السهل دراسة المثلثات القائمة الزوايا بالذات .

### قياس الزوايا

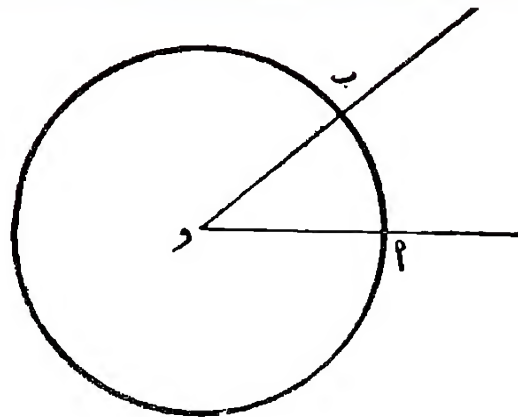
إنه من السهل أن تقيس طول خط مستقيم . ولكنه ليس من الواضح الكيفية التي تقيس بها زاوية . هناك طريقتان :

الطريقة الأولى ، القياس بالدرجات ، لها تشترك بعض الشيء مع  
العلامات الموجودة على وجه الساعة . توضع على وجه الساعة  
الأعداد من ١ إلى ١٢ على مسافات متساوية حول الحافة . فإذا  
دار عقرب الساعات من ١٢ إلى ٣ فإننا نعرف أنه قد دار ربع  
لفة . ولكي نحصل على الدرجات ، تقسم الدائرة ، لا إلى ١٢ ،  
بل إلى ٣٦٠ جزءاً متساوياً . وكل جزء يسمى درجة . ليس هناك  
سبب قوى لاختيار العدد ٣٦٠ ، وينظر الدوران حول ربع الدائرة  
( زاوية قائمة ) ٩٠ درجة ، تختصر في المعتاد إلى ٩٠° . الزاوية  
بين ١٢ ، ١ تناظر ٣٠° .

تعرف الطريقة الثانية بالتقدير الدائري ، وهي بالذات  
مناسبة للمسائل المتعلقة بالسرعة . ويمكن شرحها كالآتي : نفرض  
أن لدينا عجلة نصف قطرها ١ قدم مثبتة حول محور . يمر خيط  
حول حافة العجلة مثبت أحد طرفيه فيها أشبه ما يكون بحبل  
الرافعة ، وبسحب الخيط تدور العجلة . من الواضح أنه يمكننا  
أن نقيس المقدار الذي قد دارته العجلة بقياس طول الخيط  
المنتشر . فعندما يكون قد إنتشر ١ قدم من الخيط يقال إن العجلة  
قد دارت س زاوية نصف قطرية .

لأنه من السهل قياس زاوية بالتقدير الدائري ، خذ قطعة من  
الخشب مقطوعة على شكل دائرة نصف قطرها الوحدة . ولكي

تقيس زاوية معينة نضع مركز الدائرة « د » عند رأس الزاوية  
وتعين النقط ١ ، ب حيث يتقاطع ضلعا الزاوية مع الحافة  
(شكل ١٦). ثم تلف شريط قياس حول الحافة (غير المستقيمة)  
وتقيس المسافة من ١ إلى ب فعندما تكون هذه  $\frac{\pi}{8}$  قدم تكون  
الزاوية  $\frac{\pi}{8}$  زاوية نصف قطرية . ولكي نحصل على زاوية مقدارها  
١٠ زوايا نصف قطرية نقيس ١٠ أقدام حول الحافة . بالطبع  
سوف تكون أكثر من لفحة واحدة : حينما تنتهي نحصل على  
زاوية مقدارها ١٠ زوايا نصف قطرية . إذا دارت عجلة مركزها  
ثابت ونصف قطرها قدم واحدة بمعدل زاوية نصف قطرية في  
الثانية فإن أية نقطة على المحيط تتحرك بمعدل قدم واحدة في  
الثانية . وبذلك تكون الزوايا نصف القطرية مناسبة للمسائل  
الميكانيكية كالحبال الملفوفة حول عجلات ، أو لعجلات تتدحرج  
على الأرض ، وعموماً فهي تناسب الأغراض النظرية . وإذا



( شكل ١٦ )

رأيت في أى كتاب عن الرياضيات أى قول عن «زاوية س»  
أو الزاوية ٣٥° بدون ذكر أى شيء آخر ، يجب أن تعرف  
أن ذلك يعنى «س زاوية نصف قطرية» أو ٣٥° زاوية نصف  
قطرية وليست س درجة أو ٣٥° درجة ، عادة تكتب ٣٥° درجة  
هكذا ٣٥° . وإذا لم يذكر شيئاً عن الدرجات تكون الزاوية  
بالتقدير الدائرى . التقدير الدائرى هو الأكثر استعمالاً عند علماء  
الرياضة حيث أنه يعطى أبسط النتائج .

إذا قست محيط دائرة نصف قطرها ١ قدم سوف تجد أنه  
حوالى ٦,٢٨ قدم . وبذلك فإن اللفة الكاملة ، ٣٦٠° ، تساوى  
٦,٢٨ زاوية نصف قطرية . وليس ٦,٢٨ ما يستحب ولا حيلة لما  
فيه فهو نتيجة طبيعية في الوجود وليس خطأ من علماء الرياضة .  
فلا يمكننا التخلص منه . وإذا قسنا بالدرجات لكي ما تكون  
اللفة الكاملة عدداً مناسباً ، ٣٦٠° ، نجد أن الصعوبة تنتقل إلى  
جهة أخرى . فعندما تدور عجلة بسرعة ٣٦٠° في الثانية فإن سرعة  
النقط التي على الحافة ( بفرض أن نصف القطر كما سبق ١ قدم )  
تكون ٦,٢٨ قدم في الثانية . لذلك تستعمل الزوايا نصف القطرية  
في معظم المسائل المرتبطة بالسرعة أو بمحيطات الدوائر : يمكن  
استعمال الدرجات عندما نقيس زوايا الأشكال التي لا تتحرك ،  
الحقول مثلاً .

وإذا لم تكن قد تعودت بعد على التقدير الدائري فمن المفيد أن تقص دائرة كبيرة وتضع المقياس حول الحافة ، الدرجات والزوايا نصف القطرية . فعندما تجد كمية مثل  $20.2^\circ$  أو  $2,78$  زاوية نصف قطرية يمكنك أن تنظر إلى دائرتك وأن ترى الزوايا التي تمثلها هذه الكميات . سوف يكون من المستحسن أن تضع  $0^\circ$  عند موضع الساعة الثالثة ثم تدور اتجاه عكس عقارب الساعة لكي تنطبق  $90^\circ$  على القمة ( الساعة ١٢ ) ،  $180^\circ$  على الساعة ٩ ،  $270^\circ$  على الساعة ٦ ،  $360^\circ$  مرة ثانية على الساعة ٣ .

سوف تكون أيضاً صفر زاوية نصف قطرية عند الساعة ٣ ،  $1,07$  عند الساعة ١٢ ،  $3,14$  عند الساعة ٩ ،  $4,71$  عند الساعة ٦ ،  $6,28$  مرة أخرى عند الساعة ٣ . لقد تعود علماء الرياضة أن يفكروا بالزوايا وهي في هذه الأوضاع . ومن المستحسن أن تتبع نفس الطريقة .

### الجيوب وجيوب النمام

يمكننا الآن الاستمرار في تجاربنا على المثلثات القائمة الزوايا . مرة أخرى يجب أن تؤكد أن بداية الموضوع يجب أن تكون عملية . لا يمكنني أن أتصور نجاحاً لأى إنسان إذا جلس متأملاً



لذلك قائم الزاوية متوقعاً أن يلهم بطريقة ما لحل المسألة . يجب أن نبدأ بالتجارب ثم نرى ما تقدمه لنا من نتائج .

مسألة : يصنع خط سكة حديد زاوية مقدارها  $5^\circ$  مع المستوى الأفقي : فإذا قطع قطار ١٠٠٠٠ قدم في اتجاه هذا الخط . ما هي عدد الأقدام التي يرتفعها ؟ ليس هناك فائدة في التفكير . دعنا نفكر ونرى . نجد أن يكون الجواب صحيحاً لأقرب عشر أقدام هو ٨٧١٦ قدم ( يجب أن تصدقني في هذا ما لم تكن مستعداً لإجراء التجربة بنفسك ) . ليس هناك بالذات شيئاً بسيطاً عن الجواب : إنه لا يوحى بأية طريقة لحساب النتيجة غير القياس .

ولكن هذه النتيجة تؤدي خدمة هامة لنا : إنها تعني أننا سوف لا نحتاج لعمل أية قياسات أخرى لهذا النوع بالذات لسكك حديدية مرتفعة  $5^\circ$  . فإذا طلب منا المقدار الذي يرتفعه القطار إذا قطع ١٠٠ قدم فإننا نعرف الإجابة في الحال . حيث إن الخط مستقيم فإن القطار يصعد بانتظام . ففي ١٠٠٠٠ قدم سوف يصعد ١٠٠ ضعف ما يصعد في ١٠٠ قدم . وعلى ذلك ففي سفر طوله ١٠٠ قدم يصعد ٨٧١٦ قدم . في الحقيقة يرتفع ٨٧١٦٠ قدم لكل قدم يقطع ( صحيحاً لخمسة أرقام عشرية ) . فإذا قطع س قدم فإنه يرتفع ٨٧١٦٠ س قدم .

وبنفس الطريقة يناظر أية زاوية ( مقاسة بالتقدير الدائري

أو الدرجات ) عدداً . فعندما نقطع س قدم على مستوى مائل  
 بزاوية  $13^\circ$  فإننا نصعد ٢٢٤٩٥ و س قدم : القانون الذى يناظر  
 $30^\circ$  هو ٥٠٠٠٠ و س ( لاحظ أن هذه أولى نتائجنا البسيطة ،  
 $\frac{1}{4}$  س تناظر  $30^\circ$  ) إنه من المناسب أن يكون لديك طريقة  
 مختصرة للرجوع إلى الأعداد التى تنشأ بهذه الطريقة . لذلك  
 سوف نعطيها اسماً ، الجيوب . ( يرجع الاسم للوقت الذى كان  
 يتراسل فيه المتعلمين فى جميع البلاد باللاتينية . إنها تعنى وتر  
 القوس ، يمكن تخمين سبب هذا الاسم من ( شكل ١٧ ) . إننا  
 نقول إن ٠.٨٧١٦ هو جيب  $30^\circ$  ( تختصر فى العادة إلى جا  $30^\circ$  )  
 وأن جا  $13^\circ = ٢٢٤٩٥$  ، جا  $30^\circ = ٥٠٠٠٠$  .

وحيث إن  $30^\circ$  تساوى ٥٢٣٦ و زاوية نصف قطرية ،  
 $13^\circ = ٢٢٤٨٩$  ، زاوية نصف قطرية ،  $30^\circ$  تساوى ٠.٨٧٢٧ و  
 زاوية نصف قطرية . ( للحصول على هذه النتائج بدقة يجب علينا  
 أن نستعمل دائرة نصف قطرها ١٠٠٠٠ قدم ثم نقيس حول  
 المحيط ) لذلك فإن جا ٥٣٢٦٠ ، جا ٢٢٦٨٩ ، جا ٢٢٤٩٥ ،  
 جا ٠.٨٧٢٧ ، جا ٠.٨٧١٦ .

لاحظ فى أثناء عملك أن هناك حقيقة تبرز للعيان وهى أن  
 الزاوية بالتقدير الدائرى تساوى جيب نفس الزاوية . وأنه كلما  
 صغرت الزاوية اقتربت من جيبها . فمثلاً جا ٥٣٢٦٠ تساوى

٥٠٠ . الفرق بين العددين ٥٠٠ ، ٥٣٢٦ ، يساوى ٥٣٢٦ . ولكن  
جا ٨٧٢٧ . يساوى ٨٧١٦ . هنا الفرق بين العددين ٨٧٢٧ و ٨٧١٦ ،  
٨٧١٦ . يساوى ١١٠٠٠ . فقط ( لقد اكتشفنا هذه الحقيقة  
بدون أى مجهود : فى العادة سوف تجد أنه بمجرد البدء بجمع  
الشواهد تصنع الاكتشافات نفسها ) . توحي هذه النتيجة بأن هناك  
قانوناً ما بسيطاً يربط قيمة الزاوية بالتقدير الدائرى مع جيبيها .  
سوف لا تتعجب فى الباب الرابع عشر عندما تجد متسلسلة تعطى  
جاس بدلالة س . ومن المهم أن تتذكر أن هذه المتسلسلة تكون  
صحيحة فقط عندما تكون الزاوية مقدسة بالزوايا نصف القطرية  
لا بالدرجات . ( ابحث عن المتسلسلة فى الباب الرابع عشر  
واكتب هناك حاشية فى الهامش بهذا المعنى ) .

يعرف جيب تمام الزاوية بطريقة مشابهة . عندما تبدأ طائرة  
من مطار وتطير ١٠٠٠٠ قدم فى خط مستقيم صاعدة ٣٠ ° مع  
المستوى الأفقى فإننا نعرف أن مقدار إرتفاعها يساوى ١٠٠٠٠  
جا ٣٠ ° قدم فوق الأرض .

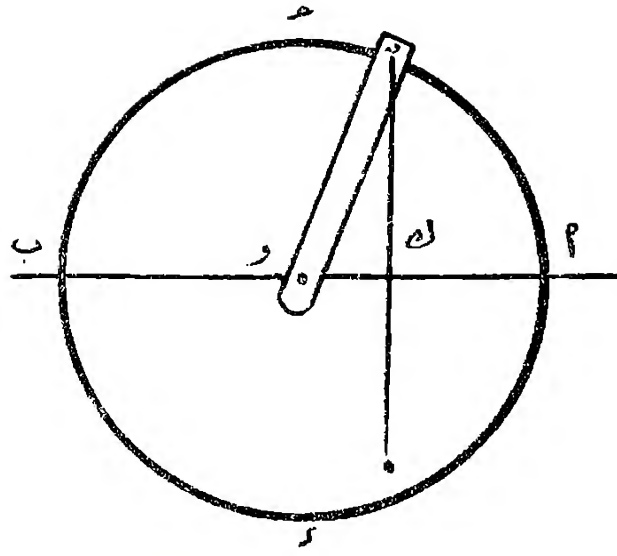
هناك نقطة معينة على الأرض أسفل الطائرة مباشرة . ما بعد  
هذه النقطة عن المطار ؟ بالقياس وجد أنه ٨٦٦.٣ قدماً . كل قدم  
آخر تطيره الطائرة ( وهى لا تزال فى اتجاهها الاصلى ) تنحرك  
هذه النقطة ٨٦٦.٣ . قدم متباعدة عن المطار . وإذا طارت الطائرة

س قدم تتحرك النقطة ٨٦٦.٣ و س قدم . تسمى ٨٦٦.٣ و .  
بحسب تمام الزاوية ٣٠° ونكتبها باختصار :  
٨٦٦.٣ = جتا ٣٠° = جتا ٥٢٣٦. ( العدد الأخير  
هو قيمة ٣٠° بالتقدير الدائري ) .

باختصار : إذا تحركنا في خط مستقيم صانعين زاوية ن مع  
المستوى الأفقي فكل قدم نقطعه يزيد ارتفاعنا بعدد معين من  
الأقدام ، يسمى جان ، ويزيحنا جانباً بعدد معين من الأقدام  
يساوي جتان .

يمكننا بسهولة أن نصنع نموذجاً ليعين معنى جان ، جتان .  
أرسم دائرة نصف قطرها قدم واحدة . درج محيطها بمقياسين  
للدراجات والزوايا النصف قطرية . علقها على حائط أو سبورة .  
خذ شريطاً من الورق المقوى طوله يزيد قليلاً عن قدم . ثبت  
أحد نهايتيه بمسمار صغير أو بدبوس رسم عند مركز الدائرة  
بحيث يكون الشريط حراً في الدوران وعلى بعد قدم واحدة  
من المركز . أعمل ثقباً صغيراً في الشريط وعلق فيه خيط  
مطمار . ص ٣٣١ شكل ١٧

لقد شرحنا الآن ماهية الجيوب وجيوب التمام . وبذلك  
يمكنك التحقق من صحة أية معلومات تعطى لك .



(شكل ١٧)

الجهاز الموضح فيه الخط ب و ا أفقى . الخيط المعالق  
من الثقب الصغير ، ق ، يقطع ب و ا عند النقطة  
ك ، ق تقع أعلى الخيط ا و ب بارتفاع يساوى ق ك ، وعلى  
بعد و ك يمين و . وحيث إن وق قدم واحدة تكون  
المسافة ق ك مقاسة لأقدام متساوية جيب الزوايا ا وق  
وتكون المسافة و ك أيضاً لأقدام متساوية لجيب تمام  
ا وق . ولعمل جدول تقريبي للجيوب ولجيب التمام  
يكون من المستحسن أن يكون طول وق متراً ثم يقاس  
و ك ، ق ك إلى أقرب ملليمتر . سوف نحصل بالتأكيـد  
على نتائج صحيحة إلى رقمين عشرين وربما لثلاثة .



وثمة نقطة واحدة تستحق الذكر . لقد قلنا إن ج ا ن تمثل ارتفاع ق فوق الخط ب و ا . ولكن لو صنعت ق زاوية تساوي  $270^\circ$  أو  $271^\circ$  زاوية نصف قطرية حينئذ تقع أسفل ب و ا بقدم واحدة . ولذكورها أسفل ب و ا بقدم واحدة يمكننا أن نقول إنها فوق ب و ا بمقدار ١ قدم . وعلى ذلك فإن ج ا  $270^\circ$  أو ج ا  $271^\circ$  يساوي - ١ . وبالمثل فإن جيوب الزوايا الواقعة بين  $180^\circ$  ،  $360^\circ$  أو بين  $314^\circ$  ،  $628^\circ$  زاوية نصف قطرية تكون بإشارة سالبة . أيضاً نعرف أن جتا ن هو بعد ق على يمين و . فإذا وقعت ق على يسار و كما يحدث للزوايا بين  $90^\circ$  ،  $270^\circ$  أو بين  $107^\circ$  ،  $471^\circ$  زاوية نصف قطرية فإن جيب التمام يكون بإشارة سالبة .

حقق بنفسك الجدول الآتي :

الزاوية (بالدرجات)	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠
د (بالزوايا النصف القطرية)	٠	١٠٥٧	٣١٤	٤٧١	٦٢٨
الجيب	٠	١+	٠	١-	٠
جيب التمام	١+	٠	١-	٠	١+

عندما يسجل مستكشف رحلته فإنه سوف يذكر في أي اتجاه كان يتحرك، وكم ميلا كان يقطعها . فإذا اتخذنا الشرق مناظر

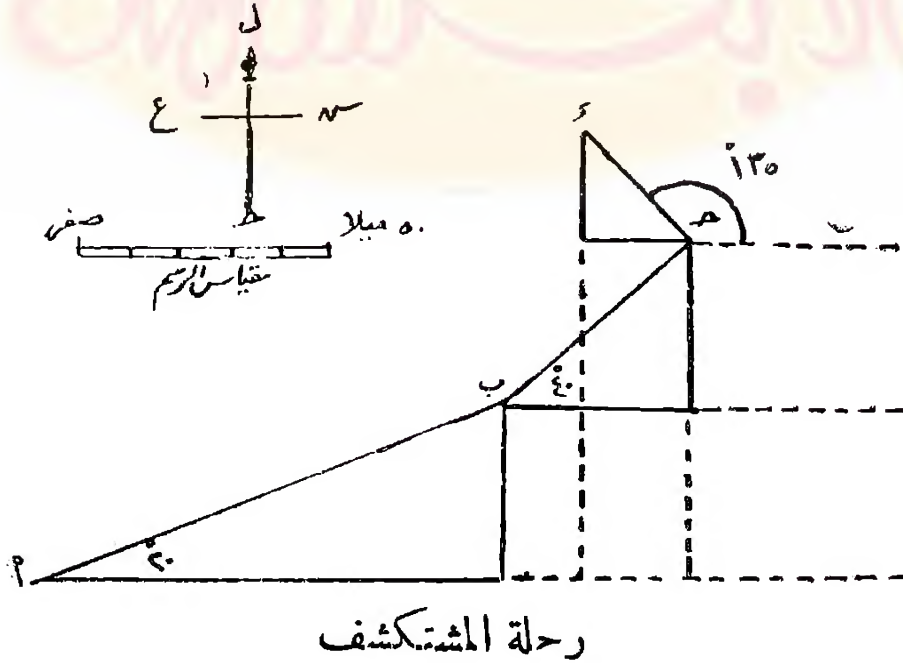
إلى  $^{\circ}$  فإن الشمال يناظر  $^{\circ} ٩٠$  وهكذا . وعلى الخريطة يعنى الشمال  
فى العادة إلى أعلى . ويعنى الشرق إلى اليمين وبذلك يكون من  
السهل أن نبين مواضع الطائرات والسكك الحديدية على الخرائط .

إذا قطع مستكشف ١٠٠ ميل فى اتجاه  $^{\circ} ٢٠$  ثم ٥٠ ميلا فى  
اتجاه  $^{\circ} ٤٠$  فما هو موضعه الجديد ؟ تكافئ  $^{\circ} ١٠٠$  ميل فى اتجاه  
 $^{\circ} ٢٠$  ،  $١٠٠$  جتا  $^{\circ} ٢٠$  شرقاً ثم  $١٠٠$  جا  $^{\circ} ٢٠$  شمالاً . تكافئ  $^{\circ} ٥٠$   
ميلا فى اتجاه  $^{\circ} ٤٠$  ،  $٥٠$  جتا  $^{\circ} ٤٠$  شرقاً ثم  $٥٠$  جا  $^{\circ} ٤٠$  شمالاً .  
وباستعمال الجداول يمكننا حساب هذه الكميات . وبذلك يكون  
من السهل أن نحصل على المسافة الكلية التى قد قطعها شرقا والمسافة  
الكلية التى قطعها شمالا . ومن الملاحظ أن هذه الطريقة :  
( ١ ) يمكن تطبيقها على مسألة النفق شكل ١٥ ، ( ب ) تلقى بعض  
الضوء على الإشارات السالبة المذكورة سابقا . فإذا قطع المشتكش  
بعد القيام بالرحلة التى ذكرناها ٣٠ ميلا أخرى فى اتجاه  $^{\circ} ١٣٥$   
( أى شمال الغرب ) فإن هذا يزيد بعده شمالا ( جا  $^{\circ} ١٣٥$  كمية + )  
ولكن يقلل من بعده شرقا ( جتا  $^{\circ} ١٣٥$  كمية - ) . فى الحقيقة  
إن استعمال الإشارات + ، - فى تعريف الجيب وجيب التمام  
يوفر علينا الكثير . إذ يكفى فقط للحصول على المسافة  
المقطوعة أن نضرب المسافة فى جيب الزاوية . تبين الإشارات  
+ ، - التى تظهر بعد ذلك ما إذا كان هناك جمع أو طرح .

## قوانين حساب المثلثات

يستخدم في حساب المثلثات نسب أخرى بجانب الجيب وجيب التمام — مثل الظل ، ظل التمام ، القاطع ، قاطع التمام .  
وهما يكن فهذه مجرد اختصارات ، ولا تدخل أية فكرة أساسية جديدة : ويمكن دراسة الموضوع بدون استعمال هذه النسب بالمرّة . لذلك سوف لا نتعرض لها هنا ولكن سوف نستمر في دراسة خواص الجيوب وجيوب التمام .

بالطبع سوف نحاول أن نكتشف خواص الجيوب وجيوب التمام التي تميدنا في أغراضنا . ولدينا في المخيلة مسألتان خاصتان .



## رملة المستكشف

ينتقل المستكشف من ١ إلى ب ، من ب إلى ح ، ثم من ح إلى د . طول ١ ب ١٠٠ ميل ، طول ب ح ٥٠ ميلاً ، ح د ٣٠ ميلاً . إنه يسجل كل جزء من رحلته ويحسب ( بالطريقة التي شرحناها ) في كل جزء مقدار بعده شرقاً ومقدار بعده شمالاً . تظهر المسافات غرباً أو جنوباً بإشارة سالبة ، حيث أن ١٠ أميال تجاه الغرب تعني ١٠ أميال أقل تجاه الشرق .

المسافة	الاتجاه	للشرق	للشمال
١ إلى ب	١٠٠ ميل	٢٠°	٩٤,٠ ميل
ب إلى ح	٥٠ ميلاً	٤٠°	٣٨,٣ ميل
ح إلى د	٣٠ ميلاً	١٣٥° -	٢١,٢ ميل
كل الرحلة من ١ إلى د			
			١١١,١ ميل
			٨٧,٥ ميل

المسألة الأولى تفرض أن في حيازتنا جداول كافية للجيوب وجيوب التمام . وتعرف « بحل المثلثات » إنها مسألة تنبت طبيعياً من علم المساحة . إذ تعطى لنا بيانات معينة عن مثلث تكفي لرسمه ، ويطلب منا استنتاج الكميات المجهولة . فنلا إذا علمنا في

المثلث  $ABC$  طول  $AB$  والزائيتين  $A$  و  $C$ ،  $B$   $AC$  فانه  
يمكننا إيجاد الأطوال  $AB$ ،  $BC$ .

كثيراً ما نجد هذه المسألة عند رسم الخرائط، وفي تركيب أجهزة  
إيجاد المدى، وتعيين موضع سفينة في البحر مستعينين بقاعدتي  
فنارتين، وفي تعيين مكان الغواصات ..... إلخ.

يحتاج المساحون والبحارة إلى جداول رياضية تبين الجيوب  
وجيوب التمام ومعلومات أخرى، ولكن لا بد لنا أن نحسب  
أولاً هذه الجداول، هذه هي مسألتنا الثانية. لقد اكتشفت  
خواص عدة للجيوب ولجيوب التمام في أثناء دراسة هذا الموضوع.  
إن الاهتمام بالجبر الذي أبداه علماء الرياضة في القرن السادس  
عشر جاء من بعض الوجوه نتيجة لمعادلات كان يجب أن تحل  
قبل حساب أية جداول مثلثية<sup>(١)</sup>.

ثالثاً، من المرغوب فيه أن نعرف خواص الجيوب وجيوب  
التمام على أسس عامة. إنها تظهر في مسائل كثيرة ويمكن في المعادلة

---

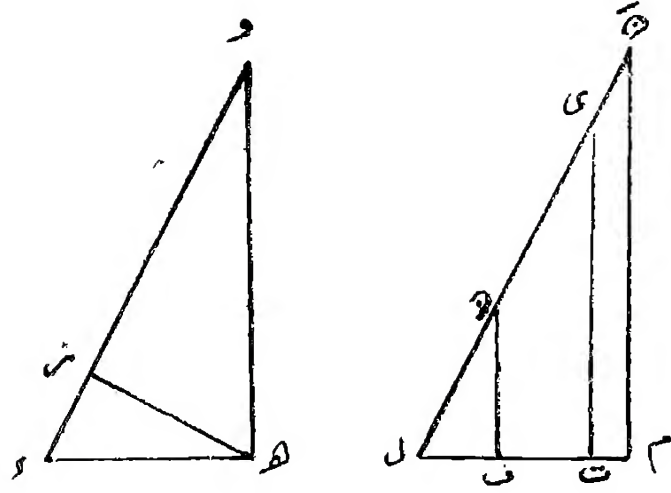
(١) انظر زيس، تاريخ الرياضيات في القرنين السادس عشر والسابع عشر،  
فصل ٢ جزء ٤. لست متأكداً إذا كان من الممكن الحصول بالإنجليزية على  
هذا المرجع.



اختصار العمل وجعله أبسط إذا عرفت هذه الخواص . وسوف  
نعطى مثالا على هذا فيما بعد .

### نظرية فيثاغورسي

في شكل ١٧ جتا ن ، جان هي أطوال الأضلاع و ك ،  
ك ق حيث ن هي اختصار للزاوية ك و ق . يجد الطلبة عادة  
أنه من السهل أن يتفهموا هذا الشكل ولكنهم لا يتعرفون عليه  
دائماً عندما يبدو في وضع لم يتعودوه أو بمقياس رسم مختلف .  
فمثلاً في شكل ١٨ يصنع و وزاوية ن مع و ه . إنه من الواضح  
تماماً أن المثلث و هو يشابه المثلث و ك ق . ربما يكون غير  
الواضح أن هناك مثلثين آخرين في الشكل بنفس الصورة .  
ولكنهما موجودان فعلاً . إذا قصصت قطعة من الورق كبيرة  
لدرجة تغطي المثلثين و ه ز ، و ه ز سوف تجد أنه من الممكن  
(بعد قلب الورقة) وضع هذين المثلثين في الوضعين ل ف ن ،  
ل ت ي . ينطبق المثلث ل م ن' تماماً على المثلث و ه و . إنه  
من الواضح أن المثلثات الثلاثة متشابهة ولا تختلف إلا في  
المساحة .



(شكل ١٨)

ما هي أطوال الخطوط  $و ز$ ،  $و$  و  $و$ ؟ يمكن وضع الخط  $و ز$  الوضع  $ل ف$  وبذلك فهو يساوي جتان من المرات  $ل ن$ . ولكن  $ل ن$  يساوي  $و هـ$  الذي يساوي جتان ونتيجة لذلك  $و ز$  يجب أن يساوي جتان من المرات جتان أو ( جتان )<sup>٢</sup> وبنفس الطريقة تماماً يمكن إيضاح أن طول  $ز و$  يساوي (جان)<sup>٢</sup>. لكن  $و ز + ز و$  يساوي  $و$  الذي يساوي واحداً .  
ينتج من ذلك أن :

$$(جتان)^2 + (جان)^2 = ١$$

وقد صادفنا في الباب الثاني مثلث أضلاعه ٣ ، ٤ ، ٥ ، وزاوية قائمة بين الضلعين ٣ ، ٤ . إذا رسمنا هذا المثلث بمقياس رسم ١ : ٥ سوف تكون الأضلاع  $\frac{٣}{٥}$  ،  $\frac{٤}{٥}$  ، ١ وعلى ذلك يكون

ع ه =  $\frac{2}{5}$  ، ه و =  $\frac{4}{5}$  ، ج ت ا ن =  $\frac{2}{5}$  ، ج ا ن =  $\frac{4}{5}$  وبذلك يصبح القانون السابق .

$$^2 5 = ^2 4 + ^2 3 \quad \text{أو} \quad 1 = ^2 \left( \frac{4}{5} \right) + ^2 \left( \frac{2}{5} \right)$$

وبسبب هذه العلاقة بين ٣ ، ٤ ، ٥ يكون المثلث قائم الزاوية .  
 مثلث آخر كذلك هو ٥ ، ١٢ ، ١٣ حيث  $^2 13 = ^2 12 + ^2 5$  .  
 إذا رسمنا زاوية جيب تمامها  $\frac{5}{13}$  فإن جيبها يكون  $\frac{12}{13}$  .

ويمكننا الآن الإجابة على السؤال الذى أثير فى الباب الثانى .  
 إن البرهان السابق هو فى جوهره نفس البرهان الذى أعطاه إقليدس . ن تعرف النتيجة فى المعتاد بنظرية فيثاغورس ويمكن ذكرها كالآتى : إذا كانت ١ ، ب ، ح هى أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية فإن  $^2 1 = ^2 ب + ^2 ح$  . هذه النتيجة فى جوهرها هى نفسها النتيجة التى قد حصلنا عليها لأنه إذا كانت ن هى الزاوية بين الضلعين ١ ، ح ، ١ = ح ج ت ا ن ، ب = ح ج ا ن ،  $^2 ح = ^2 ج ا ن + ^2 ج ت ا ن$  .  
 (يحصل على هذه النتيجة بتكبير مقياس رسم مثلثنا المقياسى و ك ق ح من المرات ) . فإن  $^2 1 = ^2 ب + ^2 ح$  .  
 ( ح ج ا ن ) . وهذه الكمية الأخيرة تساوى  $^2 ح$  مضروبة فى ( ج ت ا ن ) + ( ج ا ن ) . ومن النتائج السابقة هذه تساوى  $^2 ح$  مضروبة فى ١ : أى  $^2 ح$  . لذلك يمكن بالجر البسيط أن نستنتج مما سبق أن  $^2 1 = ^2 ب + ^2 ح$  .

## قانونه جيب التمام

لقد قصرنا الكلام حتى الآن على المثلثات ذات الزوايا القائمة وسوف نبحث الآن في الحالة العامة : نفرض أن لدينا المثلث  $ABC$  وأتينا نعرف أطوال  $AB$ ،  $AC$  ومقدار الزاوية  $BAC$ . فما هو طول  $BC$  ؟ (ربما كان من المستحيل قياس  $BC$  مباشرة بسبب وجود عوائق طبيعية كالجبال أو الأنهار أو المستنقعات ... إلخ) .

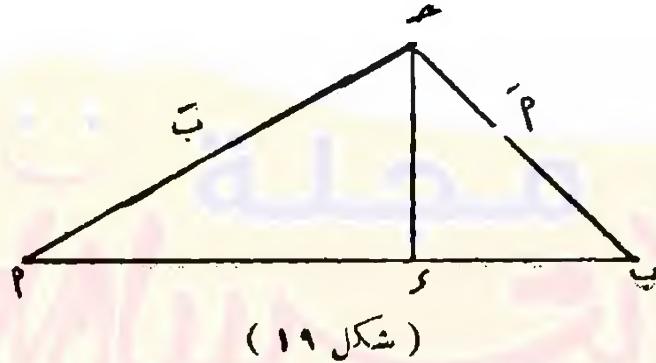
من المعتاد في كتب حساب المثلثات أن يرمز إلى الأضلاع  $a$ ،  $b$ ،  $c$  بالكميات  $A$ ،  $B$ ،  $C$  . وإلى زواياها الثلاثة بالكميات  $a$ ،  $b$ ،  $c$  وبذلك يكون  $a$  هو الضلع المقابل للزاوية  $A$  ... إلخ .

مسألتنا هي : إذا أعطى  $a$ ،  $b$ ،  $C$  ، أوجد  $c$

هل يمكننا حل هذه المسألة ؟ هل الحقائق المعطاة كافية لرسم المثلث  $ABC$  ؟ إنها تكفي . ويمكن حل المسألة بالرسم ، إنها مسألة من الممكن محارلتها .

هل يمكن بمساعدة جداول الجيوب وجيوب التمام أن نحلها بدون رسم ؟

ما هي جداول الجيوب وجيوب التمام ؟ إنها نتيجة تجارب أجريت على مثلثات قائمة الزوايا . وبذلك فإن الجيوب وجيوب التمام لا تخبرنا بشئ عن الشكل ما لم يقسم ذلك الشكل إلى مثلثات قائمة الزوايا . هل يمكن تقسيم  $\triangle ABC$  إلى مثلثات قائمة الزوايا ؟ في الحقيقة إنه من السهل جداً ، كل ما يجب عمله هو أن نرسم  $CD$  عمودياً على  $AB$  (شكل ١٩) فنحصل على مثلثين قائمي الزاوية  $\triangle ADC$  ،  $\triangle BDC$  ، ماذا نعرف عنهما ؟



الآمل قليل مع المثلث  $\triangle ADC$  فال المطلوب إيجاد  $\angle A$  وكل ما نستطيع معرفته هو أن المثلث  $\triangle ADC$  قائم الزاوية . وليس الحال كذلك بالنسبة للمثلث  $\triangle BDC$  إذ نعرف أن  $\angle B = \angle A$  وأن الزاوية  $\angle C = 90^\circ$  في الحقيقة إننا نعرف كل شيء عن هذا المثلث إذ لدينا تماماً نفس المعلومات التي كانت لدينا في مسألة السكة الحديدية ، عندما علمنا الزاوية التي تصنعها السكة الحديدية مع المستوى الأفقي (  $\angle A$  ) والمسافة التي قطعها القطار (  $BC$  ) .



هذه المعلومات الجديدة تساعدنا في حل المثلث ب و ح . إنها تخبرنا عن الطول ح و ، وترينا كيفية إيجاد ب و . لأن  $ا = ح$  ،  $و = ب$  جتا ا ، و هو ما يتبقى عند طرح ا و من ا ب . وعلى ذلك فإن و ب يساوى ح' - ب' جتا ا .

نعرف الآن ما فيه الكفاية لتعيين المثلث ب و ح تماماً . إننا نعرف و ح ، ب و وأن الزاوية ح و ب قائمة . يمكن الحصول على ب ح بنظرية فيثاغورس لأن  $ب ح^2 = ب^2 - و^2 = ب^2 - ح^2$  . وبالتعويض عن ب ح ، و ح ، و ب بالقيم التي حصلنا عليها يكون لدينا أن :

$$ا^2 = (ب' جتا ا)^2 + (ح' - ب' جتا ا)^2$$

يمكن وضع هذا القانون في صورة أبسط . وقبل هذا دعنا نتأمل لفترة وجيزة في الطريقة التي وصلنا بها إلى هذه النقطة .

أصعب الأمور في المسائل الرياضية هو طريقة البداية . قبل عمل أى حسابات يجب على الإنسان دائماً أن يرسم خطة العمل . وإلا دار الإنسان حول نفسه مثل سفينة بدون دفة . وأثناء تجهيز هذه الخطة تناسى جميع الصعوبات التي ربما تأتي في الحسابات الحقيقية . حاول ببساطة أن تكون الإطار الذي يربط ما تعرفه بالذي تريد أن تعرفه . ويكون من المفيد في بعض الأوقات أن ترسم شكلاً بالرصاص وتؤشر بالمداد على الأضلاع المعطاة

أو الزوايا المعروفة ثم تؤثر بالمداد على الأضلاع والزوايا التي  
يمكن حسابها من تلك التي سبق معرفتها . وبذلك تستمر مسجلا  
خطواتك .

سوف تكون خطتنا للمسألة الحالية كالآتي :

الخط ١ ح ، والزاوية ١ ح معلومان ( حبر هذه )

١ ح ، ١ ح يمكن حسابهما ( حبر هذه )

١ ح معلوم ( ارسم خطأ بالمداد أسفل ١ ح تماماً بحيث لا يمحو  
الخط ١ ح المرسوم من قبل ) .

وبذلك نحصل على ١ ح بطرح ١ ح من ١ ح .

نحصل بفيتاغورس على ١ ح من ١ ح ، ١ ح .

لا تنزعج إذا كنت قد نسيت القانون ١ ح = ١ ح جتا ١ ح  
أو النتيجة الصحيحة لنظرية فيثاغورس . كل ما تحتاج أن تعرفه  
لعمل هذه الخطوة هو أنه هناك قانون : وأن الشئ يمكن حسابه .  
في الحياة العملية ( التي هي أكثر أهمية من الامتحانات ) يمكنك  
دائماً أن تحصل على القوانين من أى كتاب . ولكن سوف  
لا يرشدك أى كتاب لطريقة الحل : إنه يجب عليك أن تمرن  
نفسك .

والآن دعنا نرجع لقانون ٢١ الذى أوجدناه بالجبر البسيط  
يمكننا حسابه فنحصل على :

$$٢١ = ٢'ب + ١'جا + ٢'ح - ٢'ب'ح + ١'ب'جا + ١'ب'جنا$$

جا ١' هي الطريقة المعتادة التى يكتب بها ما قد كتبناه حتى  
الآن ( جا ١ ) ، جتا ١' تعنى نفس الشيء مثل ( جتا ١ ) . توفر  
الكتابة بهذه الطريقة أقواساً كثيرة .

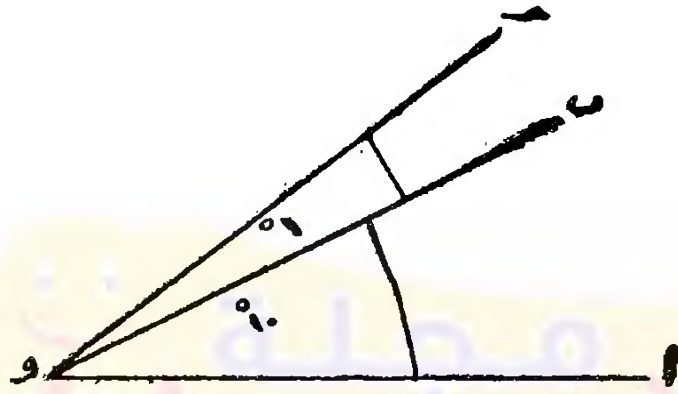
تلاحظ أن ٢'ب تظهر مرتين فى هذه النتيجة . أولاً لدينا  
٢'ب مضروبة فى جا ١ ، ثم ٢'ب مضروبة فى جتا ١ . وعلى ذلك  
يكون مجموع ٢'ب الكلى الذى يظهر هو جا ١ + جتا ١ ، وهو  
يساوى ١ . يتبع ذلك أن :

$$٢١ = ٢'ب + ٢'ح - ٢'ب'ح + ١'ب'جا + ١'ب'جنا$$

وهو القانون العادى الذى يعطى فى الكتب الدراسية  
والمستعمل فى المسائل . هذا مثل للطريقة التى بها يمكن اختصار  
القوانين باستعمال خواص الجيوب وجيوب التمام . سبق أن  
وجدنا أننا سوف نعطي مثل هذا المثال .

## فوائين الجمع

والآن دعنا نسوق بعض النتائج ذات الصلة الطبيعية بعمل  
الجداول وهى فى ذات الوقت ذات فائدة كمعلومات عامة .



( شكل ٢٠ )

نفرض أننا شرعنا فى عمل جداول دقيقة للجيوب ولجيوب  
التمام وأننا ( بكثير من الجهد والمال ) قد كوننا مثلثات كبيرة  
وحصلنا على نتائج دقيقة عن جا ١° ، جتا ١° ، جا ١٠° ، جتا ١٠° ،  
ومن الممكن أن نستمر فى عمل مثلثات جديدة ، وأن نوجد بالقياس  
جا ١١° ، جا ١٢° ... إلخ . إذا قمنا بذلك على نطاق واسع فإن  
العمل يصبح شاقاً للغاية .

ومن الطبيعى أن نعتبر  $١١^\circ = ١^\circ + ١٠^\circ$  فهل من الممكن  
استعمال هذه الحقيقة بطريقة ما ونحسب جا ١١° مستعينين

بمعلوماتنا عن  $10^\circ$  ،  $1^\circ$  ؟ إذ تمكنا من عمل ذلك فإنه سوف يساعدنا كثيراً لأن نفس الطريقة سوف تعطى معلومات عن  $12^\circ$  .

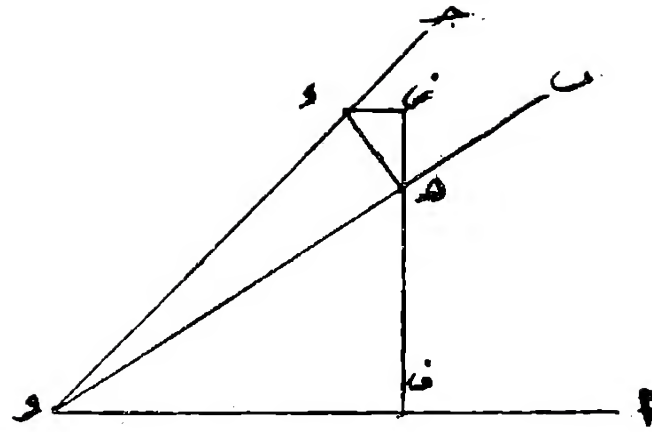
والآن لنعد إلى مسألتنا : لقد وجدنا بالقياس  
جا  $1^\circ = 0.01745$  ، جتا  $1^\circ = 0.99985$  ، جا  $10^\circ = 0.17365$  ،  
وجتا  $10^\circ = 0.98481$  ، فما قيمة جا  $11^\circ$  ، جتا  $11^\circ$  ؟

الصعوبة الأساسية في هذه المسألة هي رسم الشكل الذي يبرز  
هذه الحقائق بوضوح . لأنه من السهل تماماً أن نرسم زاوية مقدارها  
 $10^\circ$  وفوقها زاوية أخرى  $= 1^\circ$  كما في شكل ٢٠ . هذه توضيح  
تماماً العلاقة أن  $11^\circ = 10^\circ + 1^\circ$  لكنها لا تخبرنا كثيراً عن  
الزاويتين  $10^\circ$  ،  $1^\circ$  .

علينا أن نعتبر أن الزوايا المبينة في الشكل هي في الحقيقة  
 $10^\circ$  ،  $1^\circ$  . ليس هناك شيء يبين أنها كذلك بالأخص ، وليس هناك  
شيئاً يربطها مع جا  $1^\circ$  ، جا  $10^\circ$  . إلخ ( في الحقيقة لتوضيح  
الشكل يجب أن نرسم الزوايا أكبر مما هي عليه حقيقة ) .

إننا نرغب في أن نظهر الحقيقة أن  $\sin$  و  $\cos$  هي الزاوية  $1^\circ$  ،  
التي جيبها  $0.01745$  و جيب تمامها  $0.99985$  . فلنكن نفعل هذا





( شكل ٢١ )

علينا أن نكون مثلثاً قائم الزاوية . خذ  $و$  على بعد  $١$  من  $و$  وارسم  $هـ$  عمودياً على  $و ب$  ( شكل ٢١ ) وبذلك يكون  $و هـ = جتا ١^\circ = ٠,٩٩٩٨٥$  ،  $و هـ = جتا ١^\circ = ٠,١٧٤٥$  كيف يمكن إدخال جا  $١١^\circ$  في الموضوع ؟ طول  $و = ١$  ويصنع زاوية  $١١^\circ$  مع  $و$  حينئذ يكون ارتفاع  $و$  فوق  $و$  يساوي جا  $١١^\circ$  . لأنه هذا الارتفاع الذي نريد إيجاداه .

ولكن هذا من السهل عمله : إنها ذات المسألة التي عرضت لنا عندما سار المستكشف  $١٠٠$  ميلاً في اتجاه معين ثم  $٥٠$  ميلاً في اتجاه آخر . يمكننا أن ننتقل من  $و$  إلى  $و$  بالذهاب أولاً من  $و$  إلى  $هـ$  ثم من  $هـ$  إلى  $و$  . إننا نعرف طول واتجاه كل من  $و هـ$  ،  $هـ و$  .

ارسم خطاً رأسياً  $هـ$  ز ماراً بالنقطة  $هـ$  ، النقطة  $ف$  نقطة

على و ١ ، ز نقطة على نفس الارتفاع مثل و ، بحيث ف ز يساوي ارتفاع و فوق و ١ ، أى ف ز = جا ١١ ° .

لكن ف ز = ف ه + ه ز ، فإذا تمكنا من حساب ف ه ، ه ز يمكن حل المسألة . ومن السهل حساب ف ه ، وه = ٠,٩٩٩٨٥ . ويصنع زاوية ١٠ ° مع و ١ وعلى ذلك فالارتفاع ف ه = ٠,٩٩٩٨٥ ، جا ١٠ ° = ٠,٩٩٩٨٥ × ٠,١٧٣٦٥ .

يمكن الحصول على ه ز من المثلث ه ز و القائم عند ز . ويمكن الحصول على ز ه و بدوران المثلث ه و ف زاوية قائمة ثم جمعه ينكمش بمقياس أصغر الزاوية ه ز هى فى الحقيقة نفس الزاوية ه و ف ، أى ١٠ ° . ونتيجة لذلك ، ه ز = ه و جتا ١٠ ° = ٠,١٧٤٥ × ٠,٩٨٤٨١ . بجمع هاتين النتيجةين نحصل على طول ف ز ، أى جا ١١ ° .

ويمكن كتابة هذه النتيجة فى الصورة :

$$\text{جا } ١١^\circ = \text{جتا } ١^\circ \text{ جا } ١٠^\circ + \text{جا } ١^\circ \text{ جتا } ١٠^\circ$$

ليس هناك شيئاً خاصاً بالعددین ١ ، ١٠ فنفس الطريقة يمكن تطبيقها على أى عددین س ، ص بالدرجات وسوف تجد أن :

$$\text{جا } (س + ص) = \text{جتا س جا ص} + \text{جا س جتا ص}$$

أيضا سوف لا تجد صعوبة في حساب جتا  $11^\circ$  وهي بعد و  
على يمين و ، ولا في حساب القانون المناظر إلى جتا (س + ص)  
مقدرا س ، ص بالدرجات .

### قوانين أخرى

ويجب النظر إلى القوانين التي بحثنا فيها على أنها نماذج لغيرها  
من القوانين . وهناك غيرها من قوانين حساب المثلثات يمكن  
الحصول عليها بطريقة شبيهة إلى حد كبير بالطرق التي شرحناها .  
وتزدحم الكتب بالنتائج ، ولكن يكفي في معظم الأحيان أن نلم  
بعدد قليل من القوانين وبعدهد قليل من الطرق المباشرة للحل .

وإذا كنت ممن يدرسون حساب المثلثات لغرض ما محدد ،  
مثل المساحة أو الملاحة فإنك تحسن فعلا إذا حصلت على كتاب  
في الموضوع لترى أي القوانين يمكن استعمالها والموضوعات التي  
تستخدم فيها .

### تفاضل الجيوب وجيوب التمام

كثيراً ما يحدث أن تجد الجيوب وجيوب التمام في مسائل على  
حركة الآلات ، ذبذبات بعض الأجسام ، أو التغيرات في التيارات

الكهرية . كل هذه تدعو للتفاضل لكونها مسائل على تغير السرعة . لذلك كان جديراً أن ندرس السؤال الآتى : ما هو المعدل الذى تتغير به جـ ن ، وجـ ن عندما تتغير ن ؟

سوف ندرس هذه المسألة بواسطة النموذج المبين فى شكل ١٧ .

نفرض أن النقطة ق تبدأ عند ١ وتدور حول الدائرة بسرعة ثابتة ١ قدم فى الثانية . فبعد ن ثانية تكون قد قطعت ن قدم وبذلك تساوى الزاوية ١ و ق - ن زاوية نصف قطرية . (وتكون النتائج التى سوف نحصل عليها صحيحة فقط عندما تكون الزاوية مقدره بالتقدير الدائرى) .

إننا نعرف أن جـ ن تقيس ارتفاع ق فوق ا و ب بعد ن ثانية . فإذا كان هذا الارتفاع يساوى ص قدم فإن : ص = جـ ن . تقيس جـ ن بعد ق على يمين و بعد ن ثانية . فإذا كان هذا البعد يساوى س قدم فإن س = جـ ن . بالطبع إذا وقعت ق أسفل ا و ب ، تكون ص عدداً سالباً : سوف تكون س سالبة إذا وقعت ق على يسار و . فى الشكل س تساوى طول و ك بالأقدام ، ص تساوى طول ق ك بالأقدام .

لاحظ أن الرمز ص ، س ليس لها علاقة بالمرءة مع أية

رموز أخرى تكون قد استعملت في أبواب سابقة . فمثلا في الباب العاشر كانت  $s$  هي عدد الثواني التي مرت وفي البابين الحادى عشر والثانى عشر ناقشنا المقدار  $\frac{v}{s}$  . وفي هذا الجزء  $n$  هي الرمز المستعمل لعدد الثواني ، و  $s$  ،  $v$  هما فقط المعانى المعطاة في الفقرة الأخيرة .

إن السرعة التي تتغير بها  $s$  ،  $v$  هي  $\frac{v}{s}$  ،  $\frac{v}{n}$  وهذه يمكن كتابتها في الصورة  $s'$  ،  $v'$  . لذلك فإن  $s'$  تعنى السرعة التي يتغير بها الطول  $w$  .  $v'$  السرعة التي يتغير بها الطول  $q$  ( إذا وقعت  $q$  أسفل  $w$  سوف تضطر إلى مد الخط الرأسى إلى أعلى حتى يقطع  $w$  . وهكذا تعين  $k$  ) .

لقد شرحنا من قبل بعناية معنى السرعة وكيفية قياسها . إن معانى  $s'$  ،  $v'$  يجب أن تكون واضحة .

هناك أربع نقط على الدائرة — حيث يكون من السهل ملاحظة ما يحدث . والنقط هي: أعلى نقطة  $h$  ، أسفل نقطة  $w$  مع النقطتين  $w$  ،  $h$  . مسار  $q$  عند  $h$  ،  $w$  أفقيا وعند  $w$  ،  $h$  رأسياً .

وحيث إن المسار أفقى عند  $h$  ،  $w$  فلا يمكن أن يزيد أو يقل



ارتفاع ق عندما تمر بهذه النقطة . وحيث إن ص - تقيس السرعة  
التي يتغير بها ارتفاع ق ، لذلك فإن ص ' = .

عندما تمر ق بالنقطتين ح أو و ، ربما يكون من السهل أن ترى  
هذه النتيجة لو لاحظت أن ق تتحرك إلى أعلى قبل أن تصل إلى  
النقطة ح تماماً ( لذلك تكون ص ' + ) وإلى أسفل بعدما تمر  
بالنقطة ح تماماً ( لذلك تكون ص ' - ) . عند النقطة ح تكون  
ص ' تماماً عند اللحظة التي تتغير فيها من + إلى - لذلك يجب أن  
تساوى صفراً ( قارن ما كتب في الباب الحادى عشر عن  
معنى ص ' )

يبين نفس الطريقة أن س ' = . عندما تكون ق عند ا  
أو ب .

ما قيمة س ' عندما تكون ق عند ح ؟ عند ح يكون المنحنى  
أفقياً وتكون النقطة ق لحظياً لا صاعدة ولا هابطة ، ولكن نقطة  
متحركة في اتجاه اليسار بسرعة قدم واحدة في الثانية . بمعنى آخر  
عند هذه اللحظة تكون س متناقصة بمعدل ا قدم / ثانية . أى أن  
س ' = - ا

عند النقطة و تكون ق متحركة تجاه اليمين بسرعة قدم واحدة/  
ثانية ولذلك س ' = ا . بنفس الطريقة يمكننا إيجاد ص ' عند  
النقط ا ، ب . عند ا تتحرك ق لأعلى ، وتكون ص - متزايدة

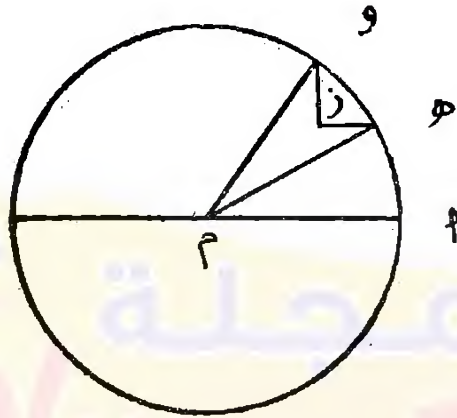
أى ص' = ١ . عند ب تكون ق متحركة إلى أسفل أى  
ص = ١ - .

يمكن الوصول للنقط ١، ح، ب، و بعد ١، ٥٧، ١،  
٣، ١٤، ٤، ٧١ ثانية (تقريباً) . يمكننا أن نكمل الجدول الذى  
سبق ذكره فى هذا الفصل هكذا :

الموضع	١	ح	ب	و
ن = الزمن بالثوانى =				
الزاوية بالتقدير الدائرى	٠	١، ٥٧	٣، ١٤	٤، ٧١
س = جتا ن = وك	٠	١ +	١ -	٠
ص = جتا ن = ق ك	١ -	١ +	١ -	٠
س =	١ +	١ -	١ +	٠
ص =	١ +	١ -	١ -	٠

هذا الجدول يوحى بشيء ما إذ أن صف ص هو نفسه صف  
س : وصف س هو نفسه صف ص مع اختلاف فى الإشارة  
لذلك فإن ص = س ، س = - ص . إننا لم نبرهن هذه النتائج  
ولا هى تبدو حتى محتملة . لقد استشهدنا فقط بأربع نقط على  
الدائرة . إن القانون ص = س<sup>٢</sup> يتفق مع الجدول تماماً . ولكن  
لأنه تخمين جرى فيجدر ، على الأقل أن تفحص النتائج .

ونترك للقارىء أن يأخذ نقطاً أخرى واقعة بين  $a$  ،  $b$  ويمكن استعمال جداول الجيوب وجيوب التمام . لا تنسى أن تقيس الزاوية  $n$  بالتقدير الدائرى (درجة واحدة  $= 0.01745$  راديان). زاوية نصف قطرية . بهذه الطريقة يمكنك إقناع نفسك أن التخمين كان صحيحاً .



( شكل ٢٢ )

ومن الممكن أيضاً أن نوضح هذه النتيجة بيانياً . في شكل ٢٢ تبين  $هـ$  موضع  $ق$  بعد  $n$  ثانية . أى أنه إذا أخذنا شريطاً طوله  $n$  قدم فإنه ينطبق على محيط الدائرة من  $a$  إلى  $هـ$  . بعد ذلك بقليل تكون  $ق$  قد تحركت إلى نقطة  $و$  ، أبعد قليلاً على المحيط . ويكون طول الجزء الزائد  $هـ و$  من الشريط  $\Delta n$  قدم . فإذا كانت  $و$  قريبة جداً من  $هـ$  يكون الشريط  $هـ و$  تقريباً مستقيماً ، وسوف لا يكون هناك خطأ كبير إذا اعتبرنا  $\Delta n$  مساوية لطول الخط المستقيم  $هـ و$  .

الخط ه ز أفقى ، الخط ز و رأسى . ولذلك ز و يمثل الزيادة  
 فى ارتفاع ق عندما تتحرك من ه إلى و ، أى  $زو = \Delta ص$  .  
 سوف نجد أن الزاوية ز و ه تقريباً مساوية للزاوية ا م ه  
 التى هى ن زاوية نصف قطرية . ونتيجة لذلك  $زو = وه$  جتان  
 تقريباً . وعندما تزداد  $\Delta ن$  فى الصغر نجد أن  $\frac{و ص}{و ن} = جتا ه$  .  
 وبنفس الطريقة يساوى ز ه النقصان فى س أى  $\Delta س$  ،  
 $زه = ه و$  جان تقريباً وهذا يؤدى للنتيجة  $\frac{و س}{و ن} = -جان$  .  
 وحيث إن س تقوم مقام جتان ، ص مقام جان ، يمكننا  
 كتابة هذه هذه النتائج فى الصورة : —

$$\frac{و(جان)}{و ن} = جتا ن ، \quad \frac{و(جتان)}{و ن} = -جان$$

هذا أقصر من قولنا :

$$، إذا كانت ص = جان فإن \frac{و ص}{و ن} = جتا ن . . إلخ$$

وهى تعنى نفس الشيء . سوف نذكر النتيجة فى هذه الصورة  
 فى الباب الرابع عشر عندما توجد متسلسلات جتان جان أو  
 على أية حال للجيب وجيب التمام . ولا يمكن أن أعد باستعمال  
 الحرف ن مع الجيب أو جيب التمام .

## الحركة على دائرة

رأينا في الباب العاشر أنه يمكن إيجاد القوة المؤثرة على جسم متحرك إذا علمنا ك س ، ك ص . كثيراً ما يحدث في الآلات أن تنحرك كتلة ثقيلة حول دائرة مثلاً كأي جزء من عجلة دوارة أو قطعة من المعدن المتصلة بعجلة آلة بخارية ( ولو أن هذه أيضاً تنحرك في خط مستقيم ) تقوم الطائفة وهي تؤدي حركة انقلاية ، أو العربة وهي تدور في منحني بنفس الحركة .

لذلك يمكن اعتبار أن هناك في شكل ١٧ ثقلاً مربوطاً عند النقطة ق ونبحث ما هي القوى اللازمة لتجعله يتحرك في الاتجاه المطلوب . حيث إن ص = جا ن ، ص ' = جتا ن ، لذلك تكون ص ( وهي معدل تغير ص ' ) - جا ن . بنفس الطريقة نجد أن س = جتا ن . ليس هناك أية صعوبة في إيجاد س ، ص ويمكن بسهولة لأي إنسان له بعض الخبرة في المسائل الأولية على الإستاتيكا والديناميكا أن يحصل على القوة الكلية المؤثرة على النقطة عند ق .

## تمارين

١ - اقطع قرصاً دائرياً من الورق المقوى وضع حول الحافة



تدریجاً لقياس الزوايا بالتقدير الدائري بالطريقة المشروحة في هذا الباب على نفس القرص ضع تدریجاً لقياس الزوايا بالدرجات .

ارسم على قطعة من الورق زاوية مقدارها  $\frac{\pi}{8}$  زاوية نصف قطرية ، زاوية واحدة نصف قطرية ،  $\frac{1}{4}\pi$  زاوية نصف قطرية ،  $\frac{1}{2}\pi$  زاوية نصف قطرية ،  $\frac{3}{4}\pi$  زاوية نصف قطرية .

كم تكون  $10^\circ$  ،  $50^\circ$  ،  $90^\circ$  ،  $180^\circ$  بالزوايا نصف القطرية ؟  
٢ - اصنع نموذجاً حقيقياً لشكل ١٧ ثم اصنع من هذا جدولاً للجيوب وجيوب تمام الزوايا  $0^\circ$  ،  $10^\circ$  ،  $15^\circ$  ، ... إلخ . ( حتى الزاوية  $90^\circ$  ) لرقمين عشرين . تحقق من نتائجك عن الجيوب من جداول مطبوعة .

٣ - اكتب من نتائجك في سؤال ٢ قيمة جتا  $10^\circ$  ، جتا  $20^\circ$  .. إلخ حتى جتا  $80^\circ$  . اكتب جيوب التمام بالترتيب العكسي : جتا  $80^\circ$  ، جتا  $70^\circ$  ، ... جتا  $10^\circ$  . ماذا تلاحظه على القائمتين ؟ ماذا يمكنك أن تقوله عن جتا س بالدرجات ، جتا  $(90 - س)$  بالدرجات ؟ هل يمكنك أن ترى أى سبب لنتيجتك ؟

٤ - من نموذجك (سؤال ٢) أوجد لرقمين عشرين جتا  $100^\circ$  ، جتا  $110^\circ$  ، ... جتا  $170^\circ$

قارن بين هذا وجا  $10^\circ$  ،  $000^\circ$  ، جا  $80^\circ$  ماذا تلاحظه على المجموعتين ؟

ما هو القانون الذى يربط جا (  $180^\circ - \text{س}$  ) بالدرجات مع جاس بالدرجات ؟

٥ - اوجد من نموذجك جتا  $100^\circ$  ، جتا  $110^\circ$  ،  $000^\circ$  ، جتا  $170^\circ$  . ( لجميع هذه الحالات تقع ك على يسار و ولذلك تكون إشارة جيوب التمام سالبة . قارن هذا مع جتا  $10^\circ$  ، جتا  $20^\circ$  ..... جتا  $80^\circ$  . ما هو القانون الذى يربط :

جتا (  $180^\circ - \text{س}$  ) بالدرجات مع جتا س بالدرجات ؟  
قارن أيضاً المجموعة التى أوجدتها جتا  $100^\circ$  ، ..... جتا  $170^\circ$  مع جا  $10^\circ$  ، ..... جا  $80^\circ$  . هل يوجد قانون يربط :  
جتا (  $90^\circ + \text{س}$  ) بالدرجات مع جاس بالدرجات . ؟ إذا كان هناك قانون فما هو ؟

٦ - تعطى الجداول المطبوعة جيوب الزوايا بين  $0^\circ$  ،  $90^\circ$  . لإيجاد جيوب الزوايا بين  $90^\circ$  ،  $180^\circ$  ، وإيجاد جيوب التمام علينا استعمال نتائج سؤال ٣ ، ٤ ، ٥ . فمثلا تعطينا الجداول أن جا  $27^\circ = 0.4540$  . ما هى قيم جتا  $53^\circ$  ، جتا  $143^\circ$  ، جتا  $127^\circ$  ؟

٧ - يطير طيار ٢٠٠ ميلا فى اتجاه  $37^\circ$  شمال الشرق . كم

ميلا يتحركها شرقاً وكم ميلا يتحركها شمالاً ؟ ( ملحوظة ، من الضروري في حالة الطيران البعيد المدى أن تأخذ في الاعتبار حقيقة أن الأرض كروية . جميع الأسئلة في هذا الباب تشير إلى رحلات قصيرة ويمكن أن نعتبر أن الأرض مستوية ) .

٨ — اوجد كم ميلا شرق ١ وكم ميلا شمالها تكون النقطة ح إذا علم من مذكرات مستكشف أن المسافة من :

أ إلى ب = ٣٠ ميلا في إتجاه ٤٠° شمال الشرق .

ب إلى ح = ١٠ أميال في إتجاه الغرب .

٩ — اوجد نفس الشيء للرحلة :

من أ إلى ب ٤٠ ميلا في إتجاه ٧٠° .

من ب إلى ح ٢٠ ميلا في اتجاه ١١٠° .

١٠ — وأيضاً :

من أ إلى ب ١٠٠ ميلا في اتجاه ٣١٥° ( أى جنوب الشرق )

من ب إلى ح ١٥٠ ميلا في إتجاه ٨٠° .

١١ — على طائرة أن تسافر إلى مدينة على بعد ١٠٠ ميلا

فإذا طارت خطأ في اتجاه يصنع ٢° مع الطريق الصحيح . فكم يكون بعدها عن المدينة بعد أن تكون قد قطعت ١٠٠ ميلا ؟

١٢ — تقع ب على بعد ٦٥ ميلا من أ في اتجاه ٣٦° ، ح على

بعد ٧٥ ميلا من ١ في اتجاه ٩٥° ، و على بعد ١٠٥ ميلا من ١  
في اتجاه ١٣٩° .

ما هو بعد ب عن ح ، ح عن و ، و عن ب .

هذه يمكن حلها بواسطة القانون :

$$١'^2 = ٢'^2 + ٢'^2 - ٢'^2 \cos ١٣٩$$

وبعملية حسابية مماثلة نحصل على المسافتين الآخرين . تذكر  
أن جتا ١٠٣° التي تظهر في قانون المسافة من و إلى ب لها إشارة  
سالبة . حقق عملياتك الحسابية بالرسم .

**\*\* معرفتي \*\***

[www.ibtesama.com](http://www.ibtesama.com)  
منتديات مجلة الإبتسامة

## الباب الرابع عشر

### الأساس

إن الدراسات الحديثة في علاقة العلم بالمجتمع قد أكدت أن العلوم التجريبية إنما نشأت عندما انتفت النظريون إلى الحرف والفن ، ومن الناحية الأخرى نجد أن أهل الحرف إلى يومنا هذا قد فشلوا في أن يتلقنوا درسا من النظريين . .

( من كتاب العلم منذ عام ١٥٠٠ لمؤلفه بليديج )

كثيراً ما يكون لطالبة الرياضيات الخبرة في تفهم براهين بعض النتائج ، ولكن لا يكون لهم القدرة على التعرف على ماهيتها . فيبقى الموضوع وكأنه كمية معزولة من المعرفة . وحيث إن الذاكرة تعتمد على الارتباطات فإنه يكون من الصعب تذكر هذه النتائج . إننا نذكر جيداً الأشياء المألوفة لنا في الحياة لأن هناك أشياء أخرى تذكرنا بها باستمرار ، وبذلك تجدد صورها في مخيلتنا . يشعر الطلبة بقلق عندما يطلب منهم أن يتذكروا أشياء غير مرتبطة بالحياة : لا يمكن للعقل أن يفكر بكفاءة ما لم يهيء له الجو المناسب لذلك .



تبدو هذه الظاهرة بوضوح في مبادئ الجبر . فكثير من الكتب المدرسية ، تشرح بدقة تامة مثلاً ، معنى متوالية هندسية ثم يأتي المدرس (الذي ربما لا يكون هذا الموضوع من اختصاصه فيضطر ان يدرسه بدون تفهمه ) ويسير على نمط هذه الكتب ويدرس المتواليات العددية والهندسية فقط لأنها ضمن المقرر .

لقد كان لدينا قبلاً ( بدون أن نلاحظ ذلك ) مثالين على المتواليات العددية ، يقطع الرجل الذي يهبط من أعلى منزل قدما واحدة في الربع الثانية الأول ، ٣ أقدام في الربع التالي ، ٥ أقدام في ربع الثانية الثالث ، ٧ أقدام في الربع الرابع وهكذا . فتكون المسافة التي قطعت في ثانية واحدة هي  $1 + 3 + 5 + 7$  قدما .

يزيد كل عدد في مجموعة الأعداد ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ بمقدار ٢ عن سابقة . تسمى مجموعة الأعداد التي يزيد فيها ( أو يقل ) كل عدد عن سابقة بكمية ثابتة بمتوالية عددية .

كان المثال الثاني في الباب الثاني عشر عندما جمعنا الأعداد ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ . تكون أيضاً هذه الأعداد متوالية عددية ، وفي نفس الباب ، بعد ذلك رأينا أنه يمكن الحصول على قيمة أكثر دقة للتكامل  $\int_0^1 x^2 dx$  لو كنا قد قسمنا الثانية الأولى إلى ١٠٠ جزءاً بدلاً من عشرة أجزاء . وكان يجب حينئذ أن نحسب مجموع ١٠٠ عدد ابتداء من ٠.٠٠١ ، ٠.٠٠٢ ، ٠.٠٠٣ ، ٠.٠٠٤ ، ٠.٠٠٥ ، ٠.٠٠٦ ، ٠.٠٠٧ ، ٠.٠٠٨ ، ٠.٠٠٩ ، ٠.٠١٠ ، ٠.٠١١ ، ٠.٠١٢ ، ٠.٠١٣ ، ٠.٠١٤ ، ٠.٠١٥ ، ٠.٠١٦ ، ٠.٠١٧ ، ٠.٠١٨ ، ٠.٠١٩ ، ٠.٠٢٠ ، ٠.٠٢١ ، ٠.٠٢٢ ، ٠.٠٢٣ ، ٠.٠٢٤ ، ٠.٠٢٥ ، ٠.٠٢٦ ، ٠.٠٢٧ ، ٠.٠٢٨ ، ٠.٠٢٩ ، ٠.٠٣٠ ، ٠.٠٣١ ، ٠.٠٣٢ ، ٠.٠٣٣ ، ٠.٠٣٤ ، ٠.٠٣٥ ، ٠.٠٣٦ ، ٠.٠٣٧ ، ٠.٠٣٨ ، ٠.٠٣٩ ، ٠.٠٤٠ ، ٠.٠٤١ ، ٠.٠٤٢ ، ٠.٠٤٣ ، ٠.٠٤٤ ، ٠.٠٤٥ ، ٠.٠٤٦ ، ٠.٠٤٧ ، ٠.٠٤٨ ، ٠.٠٤٩ ، ٠.٠٥٠ ، ٠.٠٥١ ، ٠.٠٥٢ ، ٠.٠٥٣ ، ٠.٠٥٤ ، ٠.٠٥٥ ، ٠.٠٥٦ ، ٠.٠٥٧ ، ٠.٠٥٨ ، ٠.٠٥٩ ، ٠.٠٦٠ ، ٠.٠٦١ ، ٠.٠٦٢ ، ٠.٠٦٣ ، ٠.٠٦٤ ، ٠.٠٦٥ ، ٠.٠٦٦ ، ٠.٠٦٧ ، ٠.٠٦٨ ، ٠.٠٦٩ ، ٠.٠٧٠ ، ٠.٠٧١ ، ٠.٠٧٢ ، ٠.٠٧٣ ، ٠.٠٧٤ ، ٠.٠٧٥ ، ٠.٠٧٦ ، ٠.٠٧٧ ، ٠.٠٧٨ ، ٠.٠٧٩ ، ٠.٠٨٠ ، ٠.٠٨١ ، ٠.٠٨٢ ، ٠.٠٨٣ ، ٠.٠٨٤ ، ٠.٠٨٥ ، ٠.٠٨٦ ، ٠.٠٨٧ ، ٠.٠٨٨ ، ٠.٠٨٩ ، ٠.٠٩٠ ، ٠.٠٩١ ، ٠.٠٩٢ ، ٠.٠٩٣ ، ٠.٠٩٤ ، ٠.٠٩٥ ، ٠.٠٩٦ ، ٠.٠٩٧ ، ٠.٠٩٨ ، ٠.٠٩٩ ، ٠.١٠٠ .

إلى ٠.٠٠٩٨ ، ٠.٠٠٩٩ . هل يمكن اختصار العمل بحيث لا نكون مضطرين للقيام فعلاً بعملية الجمع هذه ؟ نعم هذا ممكن . مجموع العدد الأول . ، العدد الأخير ، ٠.٠٠٩٩ هو ٠.٠٠٩٩ . مجموع العدد الثاني ٠.٠٠٠١ والعدد ما قبل الأخير ٠.٠٠٩٨ هو أيضاً نفس الكمية . بالاستمرار في هذه الطريقة يمكننا أن نقسم الأعداد إلى أزواج ، مجموع كل زوج ٠.٠٠٩٩ . بذلك يكون لدينا ٥٠ زوجاً مجموعها  $٥٠ \times ٠.٠٠٩٩$  أى ٤٩٥٠ . لقد ذكرنا هذه النتيجة بدون برهان في الباب الثانى عشر .

### المتواليات الهندسية

تتكون المتوالية الهندسية من مجموعة من الأعداد نحصل على أى عدد فيها بضرب العدد الذى قبله فى كمية ما ثابتة : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٠٠٠٠٠

أو ٣ ،  $١\frac{1}{4}$  ،  $\frac{3}{4}$  ،  $\frac{3}{8}$  ، ٠٠٠٠

تأتى مثل هذه المتسلسلات بطرق عديدة .

على سبيل المثال هاك السؤال المشهور :

متى يمر عقرب الدقائق فوق عقرب الساعات ما بين الساعة ٣

والساعة ٤ ؛ إيه من الطبيعي تماماً أن نبدأ التفكير بالطريقة الآتية . عند الساعة ٣ يكون عقرب الدقائق متأخراً ١٥ دقيقة عن عقرب الساعات . يتحرك عقرب الساعات ببطء بحيث يمكن لعقرب الدقائق أن يلحق به تقريباً ، في ظرف ١٥ دقيقة . يتحرك عقرب الساعات مسافة خمس دقائق في كل ساعة — أى أن سرعته  $\frac{1}{4}$  من سرعة عقرب الدقائق : وبذلك عند الساعة ٣،١٥ يكون عقرب الساعات قد تحرك  $\frac{1}{4}$  دقيقة . وهذا هو المقدار الذى لا يزال على عقرب الدقائق أن يلحق به . ويصل عقرب الدقائق هذا الموضوع بعد  $\frac{1}{4}$  دقيقة أخرى . لكن أثناء ذلك يكون قد تحرك عقرب الساعات مسافة أخرى  $\frac{1}{4}$  من الدقيقة . بهذه الطريقة نستمر في تصحيح حدسنا الأول ، ١٥ دقيقة ، بأن نضيف إليه على الترتيب  $\frac{1}{4}$  ثم  $\frac{1}{4}$  وهكذا ، كل تصحيح يساوى  $\frac{1}{4}$  من قيمة التصحيح الذى قبله . بهذه الطريقة نحصل على المتوالية الهندسية :

$$10 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

يمكننا أن نحصل على قيمة المتسلسلة لأى درجة من الدقة باتخاذ عدد كاف من حدودها . فمثلاً تعطى الحدود الأربعة

الأولى فى المتسلسلة جواباً يختلف عن الجواب الصحيح بأقل من ٠.٠٠١.

إنه من الممكن أن نستنتج مجموع هذه المتسلسلة : يتحرك عقرب الساعات ٥ دقائق بينما يتحرك عقرب الدقائق ٦٠ دقيقة ، أى أن عقرب الدقائق يسبق عقرب الساعات بمعدل ٥٥ دقيقة كل ساعة أو  $\frac{11}{12}$  من الدقيقة فى كل دقيقة ،  $\frac{11}{12}$  هى نفسها  $\frac{1}{12}$  . ونتيجة لذلك فلكى يلحق عقرب الدقائق بعقرب الساعات ، يحتاج إلى ١٥ على  $\frac{1}{12}$  دقيقة أى  $16\frac{2}{3}$  دقيقة وهو مجموع المتسلسلة .

مسألة أخرى : ينتج الطن من بذور البطاطس محصولاً مقداره ٣ أطنان وهذا يمكن إما أن يستهلك أو يستعمل مرة أخرى كبذور . ما هى الكمية التى يجب أن يشتريها مزارع إذا رغبت عائلته فى استهلاك طناً من البطاطس كل سنة على طول السنين ؟

أول كل شىء ، عليه أن يشتري طناً ليغضى حاجته لهذه السنة . للحصول على طن للسنة التالية يكفى أن يزرع الآن  $\frac{1}{4}$  طن . لتغطية حاجات السنة التى بعد التالية يكفى ،  $\frac{1}{4}$  طن : لأن ذلك ينتج  $\frac{1}{4}$  طن للسنة التالية ، وهذا عند زراعته مرة أخرى ينتج طناً واحداً للسنة التى بعدها وهكذا . لتغطية حاجات عائلته على مدى السنين يجب على المزارع أن يشتري  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$  الخ طناً .

ما هو مجموع هذه المتسلسلة ؟ دعنا نسمى المجموع الذى  
تتول إليه س .

$$\text{وبذلك تكون س} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$
$$\text{، } 3 \text{ س} = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots$$

نلاحظ أن متسلسلة 3 س هى نفسها متسلسلة س بإضافة 3 .  
عند البداية ، لذلك 3 س = 3 + س . ينتج أن :

$$2 \text{ س} = 3 \text{ أى س} = \frac{3}{2} .$$

يمكننا أن نرى بسهولة أن هذا هو الجواب الصحيح . فإذا  
اشتري المزارع  $1\frac{1}{3}$  طن فإنه يحتاج إلى طن واحد ليا كلة فى هذه  
السنة وإلى  $\frac{1}{3}$  طن ليزرعه . سوف يكون المحصول ثلاثة أضعاف  
ما قد زرع ، أى سوف يكون  $1\frac{1}{3}$  طن ، مرة أخرى يكون  
لديه طناً ليا كلة و  $\frac{1}{3}$  طن ليزرعه . بهذه الطريقة يمكنه هو  
وأحفاده أن يستمروا إلى ما شاء الله .

يبقى نفس النوع من المتسلسلات مرتبطاً بالدفع السنوية ،  
الربح المركب ، الخصم ، الأسهم والسندات .. إلخ إن الربح  
المركب هو أحد الأسباب التاريخية الأساسية التى جعلت  
المتواليات الهندسية أول ما يدرس . إنها بدون شك موضوع مهم



لمن يريد الثراء بالربا : وما عدا ذلك يبدو الريح المركب موضوعاً  
ثقيلاً لمعظم الناس وبالذات للأطفال في المدارس .

إن دراسة مقاومة الهواء لتطبيق آخر على المتسلسلات  
الهندسية . فالجسم المتحرك في الهواء يشبه رجلاً مندفعاً في وسط  
حشد . كلما أسرع زاد عدد من يصطدم بهم : بمعنى آخر إن  
المقاومة التي تعوق تقدمه تتناسب مع سرعته . ينطبق نفس الشيء  
على جسم متحرك في الهواء (بفرض أن سرعته ليست كبيرة جداً) :  
كلما يزيد سرعته تزيد كمية الهواء التي يدفعها عن طريقه في كل  
ثانية ، ونتيجة لذلك يفقد كسر معين من سرعته في كل ثانية . فإذا  
قطع الجسم قدماً واحدة في الثانية الأولى فإنه يقطع  $\frac{1}{4}$  قدم في  
الثانية التالية ،  $\frac{1}{4}$  قدم في الثانية الثالثة وهكذا ، بذلك تكون  
المسافة المقطوعة  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$  وهي نفس  
المتسلسلة التي كانت لدينا من قبل بالطبع من المفروض عدم وجود  
أية قوة أخرى تؤثر على الجسم عدا مقاومة الهواء . كأن يكون  
الجسم مروحة محرك ، فعندما تكون متزنة تماماً وغير متصلة  
بالآلة لا يكون هناك أية قوة تعمل على دورانها فإذا دفعت دفعة  
بسيطة تبدأ في الدوران ولكن كما شرحنا ، تتلاشى حركتها  
تدريجياً

كانت العلاقة بين الجسم المتحرك والمتواليات الهندسية

معروفة قبلا في القرن السابع عشر . إن مرور تيار الكهرباء في سلك هو تطبيق آخر على نفس الموضوع : يصطدم الإلكترون المتحرك داخل السلك مع الذرات المكونة له ، تماما مثل رجل متحرك في وسط حشد فإذا وصل السلك ببطارية كهربية ، تتغير الحالة : يكون هناك حينئذ قوة تدفع الإلكترون للأمام ، بنفس الطريقة تتعرض نقطة المطر الساقطة لقوة جذب الأرض لهذا السبب لا تتوقف عن حركتها كنتيجة لمقاومة الهواء . لذلك فإن الطريقة التي تسقط بها قطرة المطر أكثر تعقيدا بقليل ولكنها قد حلت هي أيضاً بواسطة متسلسلات هندسية في القرن السابع عشر .

إذا كانت  $s$  أى عدد ، يمكننا أن نبين ( كما في الطريقة المستعملة في مسألة البطاطس ) أن المتسلسلة :

$$1 + s + s^2 + s^3 + \dots \text{ تساوى } \frac{1}{1-s}$$

بشرط ألا تكون  $s$  أكبر من الواحد .

## متسلسلات أخرى

سبق أن رأينا أنه يمكن التعبير عن  $\frac{1}{1-s}$  في صورة متسلسلة في قوى  $s$  المختلفة . في الحقيقة يمكن التعبير تقريباً عن كل دالة في  $s$  بنفس الطريقة . فمثلاً  $\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1+s^2} + \frac{1}{1+s^4} + \frac{1}{1+s^8} + \dots$  ، لو (  $1-s$  ) تساوى المتسلسلة  $1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{10^s} + \dots$  بفرض أن  $s$  أقل من الواحد في كلا المتسلسلتين . من الواضح أن المتسلسلتين غير صحيحتين عندما تكون  $s$  أكبر من الواحد . بالطبع لم نبرهن تكافؤ المتسلسلتين مع الدوال المذكورة : للبراهين يمكن الرجوع إلى الكتب المختصة .

إنه من المستحسن دائماً أن نعبر عن أى دالة في صورة متسلسلة . مثلاً نعلم من الباب الثانى عشر معنى لو ٢ ، ربما يكون من الصعب أن نعرف أى عدد هذا . لكن يمكننا معرفة ذلك بواسطة المتسلسلات حيث إنه يمكن الحصول على لو ٢ من لو  $\frac{1}{2}$  كالآتى :  $2 \times \frac{1}{2} = 1$  بأخذ اللوغاريتمات ينتج أن :

$$\text{لو } ٢ + \text{لو } \frac{1}{٢} = \text{لو } ١ ، \text{وحيث إن } \text{لو } ١ = ٠ .$$

$$\text{لذلك ينتج أن } \text{لو } \frac{1}{٢} = \frac{1}{٢} + \frac{1}{٤} + \frac{1}{٨} + \frac{1}{١٦} + \dots$$

تصغر حدود هذه المتسلسلة بسرعة كبيرة أى أنه لسنا  
فى حاجة أن نأخذ كثيراً من الحدود للحصول على قيمة  $\text{لو } ٢$   
المضبوطة .

ميزه أخرى لمثل هذه المتسلسلة هو أنه من السهل أن تفاضلها  
أو تكاملها ، حيث إننا نعرف هذا جيداً مع قوى  $s$  المختلفة .  
إذا فاضلنا المتسلسلة التى تكافئ  $\text{لو } (١ - s)$  ما هى المتسلسلة  
التي نحصل عليها ؟ هل هذه النتيجة معقولة ؟

فى آخر هذا الباب سوف نعبر عن  $s$  فى صورة متسلسلة ،  
والآن نشرع فى إيجاد متسلسلة للدالة جتا  $s$  ، جاس لى نبين  
كيفية طرق هذه المسائل .

بيننا فى الباب الثالث عشر أن جتا صفر = صفر ،  
جتا صفر = الواحد الصحيح ، وأيضاً أن  $\frac{\text{جاس}}{s} = \text{جتا } s$  ،

جتا س = - جاس . مما يدعو للعجب أن من مثل هذه المعلومات فقط يمكننا إيجاد المتسلسلة التي نريدها .

إذا عبرنا عن جتا س بمتسلسلة في قوى س المختلفة فإنه سوف يكون هناك معاملات معينة للحدود المختلفة [ كما كانت الأعداد ١ ، ١/٢ ، ١/٢٤ ، ١/٧٢٠ ، إلخ معاملات لحدود المتسلسلة - لو (١-س) ]  
هـ

سوف نسمى هذه المعاملات ا ، ب ، ج ، و ، ز ، ح ، ط ، ي ( لقد استبعدنا الحرفان د ، هـ لأننا نستعمل د بمعنى خاص في

محسوس كما أن هـ لها معنى خاص أيضا ) وبذلك تكون المتسلسلة :

$$\text{جتا س} = ١ + ب س + ح س^٢ + و س^٣ + ز س^٤ + ح س^٥ + ط س^٦ + ي س^٧ + \dots$$

الآن نعين قيم ا ، ب ، ج ، و ، ز ، ح ، ي ، إلخ .

يمكن إيجاد قيمة ا مباشرة . إذ بوضع س = ٠ في المتسلسلة نحصل على جتا صفر = ا أي ١ = ا .

إذا فاضلنا المعادلة السابقة نجد ( حيث إن تفاضل جتا س هو - جاس ) أن .

$$- جاس = ب + ٢ ح س + ٣ و س^٢ + ٤ ز س^٣ + ٥ ح س^٤ + ٦ ط س^٥ + ٧ ي س^٦ + \dots$$



يمكننا الآن الحصول على ب بوضع س = صفر نحصل على  
جا صفر = ب أى ب = صفر تفاضل الآن متسلسلة ..  
— جاس . تفاضل جاس هو جتا س وعلى ذلك فإن .

$$— جتا س = ٢ ح + ٦ و + ١٢ ز + ٢٠ ح ص + ٣٠ ط س + ٤٢ ي س + ...$$

يمكن إيجاد ح بنفس الطريقة تماماً بوضع س = صفر نحصل  
على المعادلة — ١ = ٢ ح أى ح = — ١/٢ .

من الواضح أنه لا يوجد شيء يمنعنا من الاستمرار في هذه  
العملية إذا شئنا ويمكننا إيجاد قيمة أكبر عدد من و ، ز ، ح ...  
يهمنا إيجادها .

والنتائج هي ( يمكنك أن تتحقق منها بنفسك ) .

$$١ = ١ ، ٠ = ب ، ٠ = ح ، — ١/٢ = و ، ٠ = ز ، — ١/٢ = ح ، ٠ = ط ، — ١/٢ = ي ، ٠ = ...$$

$$لذلك فإن جتا س = ١ - ١/٢ س + ١/٢٤ س - ١/٧٢٠ س + ...$$

القاعدة التي تعطى الأعداد ١ ، ٢ ، ٢٤ ، ٧٢٠ . إلخ هي  
الآتية . تبدأ بالعدد ١ ، نضرب هذا العدد في ١ × ٢ ليعطى  
العدد الثانى ٢ . يضرب العدد الثانى في ٣ × ٤ نحصل على العدد  
للتالث الذى نضربه مرة ثانية في ٥ × ٦ يعطى العدد الرابع

وهكذا . إذا فاضلنا المتسلسلة السابقة نحصل على المتسلسلة التي تعطي جاس :

$$جاس = س - \frac{1}{3}س^3 + \frac{1}{5}س^5 - \frac{1}{7}س^7 + \dots$$

تفيد هذه المتسلسلات في عمليات الحساب إذ أن حدودها تصغر بسرعة كبيرة فتكفي الحدود القليلة الأولى منها لتعطي نتائج دقيقة للغاية . لذلك فإن هذه المتسلسلات تعتبر حلاً للمسألة الموجودة في الباب الثالث عشر وهي كيفية إيجاد طريقة لعمل جداول الجيوب وجيوب التمام بدون رسم أى شكل .

### خطورة المتسلسلات

لعبت المتسلسلات دوراً هاماً في الأيام الأولى لعلم التفاضل خصوصاً في السنوات التي تلت عام ١٦٦٠ . كانت هذه فترة نشاط علمي عظيم : كان الناس مهتمين بالتقدم العلمي الجديد فواجهوا مجموعة كبيرة من المشاكل العلمية ، تركيب الساعات والتليسكوبات والخرائط والسفن . فإذا أعطت أية طريقة رياضية النتيجة الصحيحة لمسألة عملية لا يعبأ الناس كثيراً ما إذا كانت هذه الطريقة منطقية أم لا . وعند استخدام الكميات الصغيرة  $\Delta$  س ، اتبع علماء الرياضة الطريقة التي تناسبهم : ففي لحظة

ما قالوا د إن  $\Delta$  س صغيرة جداً وسوف يكون من المناسب أن نعتبرها وكأنها مساوية للصفر ، وبعد ذلك بقليل أرادوا أن يقسموا على  $\Delta$  س ولذا قالوا د إذا كانت  $\Delta$  س صفراً لا يمكننا القسمة عليها . سوف نفرض  $\Delta$  س صغيرة لكن لا تساوى الصفر تماماً ، فرضوا صحة ما قد يناسبهم أكثر . وإذا اتضح لهم أى خطأ فى النتيجة عدلوا عما فرضوه . هذه الطريقة التجريبية نجحت تماماً حيث إن النتائج كانت دائماً تقارن بالواقع .

لقد عولجت المتسلسلات بهذه الطريقة أيضاً . فإذا بدأ من المعقول عمل خطوة معينة نفذت تلك الخطوة وإذا أعطت نتيجة غير معقولة استنتج الإنسان فى الحال أن هناك خطأ .

بعد حوالى ١٥٠ عاماً كانت فيها الرياضة خالية من المشاكل بدأت الصعوبات فى الظهور . فمثلاً فى حساب اللوغاريتمات نتعرض للمتسلسلة  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$  سوف نفرض أن ١ هو مجموع النصف الموجب من هذه الحدود بحيث إن :  $1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  وأن ب هو مجموع باقى الحدود فى المتسلسلة ، أى أن :  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  نلاحظ أن كل حدود ب زوجية . إذا ضاعفنا ب فإننا بذلك نحصل على أن  $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

لدينا فى المتسلسلة الأخيرة كل حدود ١ بالإضافة إلى حدود

ب . لذلك فإن  $2 = 1 + 1$  ب أى  $1 = 2$  ب . لكن ب لا تساوى 1 لأن كل حد فى 1 أكبر من نظيره فى ب : 1 أكبر من  $\frac{1}{2}$  ،  $\frac{1}{2}$  أكبر من  $\frac{1}{3}$  ،  $\frac{1}{3}$  أكبر من  $\frac{1}{4}$  وهكذا . عندما 1 تساوى ب فإن متسلسلتنا الأصلية  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = 1 - 1 = 0$  = صفر ولكن مجموع المتسلسلة الأصلية هو فى الحقيقة أقل من 0 ، بقليل .

هذا يعنى أنه بإجراء عمليات تبدو منطقية قد توصلنا لنتيجة غير صحيحة . من الناحية الأخرى فى كثير من الحالات قد حصلنا باستعمال المتسلسلات على نتائج مفيدة وصحيحة لذلك كان من الطبيعى أن يبدأ علماء الرياضيات فى البحث بعناية أكثر عن المعنى المضبوط للمتسلسلة ، وما هى العمليات بالضبط التى يمكن إجراؤها على المتسلسلات . فى خلال القرن التاسع عشر قام علماء الرياضيات ببحث مثل هذا . وكان هناك رد فعل ناتج عما كان سائداً فى الأزمنة السالفة . فانتشر جو من الاحتياط . أصبح علماء الرياضيات أشبه ما يكونوا بالمحامين يهتمون كثيراً باستعمال الكلمات على الوجه الصحيح ، متشككين فى المناقشات التى تبدو فى ظاهرها « معقولة » كما استحدثت بعض كلمات مثل « التقارب » ، « المنتظم » ، لكنى نميز بين المتسلسلات التى يمكن الاعتماد عليها عن تلك التى تؤدي إلى نتائج خاطئة .

ولم يستقص علماء الرياضيات فقط عن منطق المتسلسلات ، بل

أصبحوا متشككين في جميع الكلمات التي يستعملونها ، ولم يستريحوا حتى كانوا قد أعطوا تفسيرات صحيحة جداً لجميع التعبيرات التي استعملوها . أصبح في المعتاد أن ترى كتب الرياضة الحديثة أطول بكثير من الكتب القديمة ، لأنها أصبحت تهتم بشرح وتحقيق الموضوعات التي كانت تبدو واضحة لأول وهلة .

هناك خرافة حول أم أربعة وأربعين التي سئلت عن الطريقة التي تحرك بها أرجلها فتحيرت من السؤال لدرجة أنها لم تتمكن من المشي بعد ذلك . عندما يبدأ الطلبة في دراسة الرياضات الحديثة كثيراً ما يقاسون من إضطراب مماثل : إنهم يضيعون أوقاتاً كثيرة في تعلم طريقة النقد لدرجة تجعلهم غير قادرين على الانتاج . أحسن منهاج هو أن نتبع التاريخ : أولاً نتعلم كيف نستخلص النتائج كما تمكن الباحثون القدامى أن يستخلصوها . وبعد ذلك فقط تفحص أضعف النقط في الطريقة التي استخدمت لطرق الموضوع . إذا لم يكن هناك مخاطرة قام بها علماء الرياضة المبدعون في القرنين السابع عشر والثامن عشر لما وجد علماء الرياضة في القرن التاسع عشر شيئاً لكي ينتقدوه .



أصل هـ

تعطى كتب علمية كثيرة تفسيرات للعدد هـ وهى فى ذاتها  
ممتازة ومنطقية ولكنها تترك القارىء وهو شاعر أن كل شيء قد  
أطلق « من الظلام » ، إن الموضوع منطقى ولكن كيف نشأ ؟ وعلى  
أى شيء هو ؟

لقد درسنا قبل دوالاً مثل  $y = x^2$ ،  $y = \sin x$ ،  $y = \cos x$  . والآن سوف نحاول أن نجمع الحقائق عن هذه الدوال ونبين الارتباطات بينها .

تنشأ فكرة الدالة الآسية من عملية الإقراض . إن الطريقة التي بها يقفز الدين على فريسته ويخنقها قصة قديمة في كل من الحقيقة والخيال . إذا عرض مرابي ١٠٠ جنيها لكي يرددها المدين ١١٠ جنيها في ظرف شهر، وإذا لم يتمكن المدين في ظرف شهر أن يدفع هذا المبلغ فإنه يجد نفسه مضطراً أن يعقد سلفة جديدة بنفس الشروط لشهر آخر ، مقدار السلفة الجديدة يكون ١١٠ جنيها وليس ١٠٠ جنيها . سوف يصبح الدين في ظرف سنة أكثر من ٣١٣ جنيها . يزداد الدين لكل شهر تال بحيث يصبح ١٣١ ضعف مقداره الأول . ( قارن هذا مع كيف اكتشفت اللوغاريتمات

في الباب السادس ) ١٠ ٪ في الشهر تعادل ٢١٣ ٪ في السنة  
أكثر من ١٢ ضعف ١٠ ٪ .

يمكننا أن نعكس هذا ونسأل . : ما هو السعر في الشهر الذي  
يعادل ٥ ٪ في السنة ؟ يمكننا أن نحاول أسعاراً مختلفة في الشهر  
حتى نجد سعراً يعادل ( لدرجة كافية من الدقة ) ٥ ٪ في السنة .  
ويمكننا أن نسأل ما هو السعر في الأسبوع ، ما هو السعر في اليوم  
الذي يناظر ٥ ٪ في السنة . وإذا شئنا يمكننا إيجاد السعر في الساعة  
أو في الدقيقة أو في الثانية . هناك جواب واحد فقط صحيح لكل  
من هذه الأسئلة . عندما يتعين السعر في السنة يتعين من تلقاء  
نفسه السعر لأي فترة أخرى من الزمن .

نفرض مثلاً أن السعر لسنة كاملة كان ١٠٠ ٪ وتقاضى  
مراب غير خبير ٤٠ ٪ لستة أشهر . لذلك يكون من الأفضل أن  
نقترض لمدين كل منها ستة أشهر بدلاً من مدة سنة واحدة .  
إذ بذلك تصبح المائة جنيهه بعد ستة شهور ٢٤٠ جنيهاً . وباعتبار  
هذا الدين وكأنه سلفة جديدة مقدارها ١٤٠ جنيهاً بسعر ٤٠ ٪  
يكون ربح الستة أشهر الباقية ٥٦ جنيهاً ، وبذلك يصبح الدين  
١٩٦ جنيهاً في نهاية السنة كلها . أما إذا اقترضنا لمدة سنة فيجب  
دفع ٢٠٠ جنيهاً في نهاية السنة . بنفس الطريقة إذا تعين السعر  
لستة أشهر وكان ٥٠ ٪ فإن ذلك يشجع الناس أن يقترضوا نقوداً

لمدة ستة شهور ثم يقرضونها مرة أخرى لفترتين كل مقدارها ستة أشهر : بعد الستة أشهر الأولى تصبح المائة جنيه ١٥٠ جنيهاً وبعد الستة أشهر الثانية تصبح المائة والخمسون جنيهاً ٢٢٥ جنيهاً ، وبعد رد مبلغ المائتي جنيه يتبقى ربحاً مقداره ٢٥ جنيهاً . بهذه الطريقة العملية يكون سعر ستة أشهر شيئاً ما أكبر من ٤٠٪ ولكنه أقل من ٥٠٪ .

يمكننا عمل جدول يبين ما يؤول إليه الجنيه الواحد بعد أية فترة من الزمن ، أسابيع ، أيام ، ساعات ، دقائق ، بمجرد معرفة السعر في السنة . إذا أصبح الجنيه الواحد ١ جنيهاً بعد سنة واحدة فإنه يصبح ١١ بعد ١١ سنة ( ١١ عدد صحيح ) . لذلك يكون من الطبيعي أن ١١ ليس له معنى في ذاته : فهناك كلمات كثيرة لها أكثر من معنى واحد . لأنه مضیعة للوقت أن نناقش أيهما المعنى الصحيح . ترتبط الكلمة بالشئ الذي تدل عليه فالوردة بأى اسم آخر تعطى رائحة زكية . فإذا قلنا إن ١١ جنيهاً هى ما يؤول إليه الجنيه الواحد بعد ١١ سنة تحت شروط معينة فلنا كل الحق فى ذلك ( يتفق هذا التعريف مع ما قد أعطى فى الباب السادس ولو أنه بصورة مختلفة ) تعنى ١١ ما يؤول إليها الجنيه الواحد بعد ١١ سنة . ويجوز أن تكون ١١ كسراً .

وكما رأينا في الباب السادس فإن أنسب الطرق لعمل جدول هو أن نبدأ بإحداثيات تغير بسيط ثم ننتقل من هذا إلى إحداثيات تغيرات أكبر . إذا إزداد الجنيه الواحد بأي سعر فسوف يأتي الوقت الذي يزيد فيه بواحد من ألف وليكن في ك سنة ( يجوز أن تكون ك كسراً صغيراً ) . بعد كل ك سنة تمر يكون المبلغ المستحق  $\frac{1}{K}$  ضعف قيمته الحالية . بذلك يمكننا أن نرسم شكلاً بيانياً يوضح طريقة ازدياد الدين وذلك برسم خطوط رأسية تبعد عن بعضها مسافة ك بوصة . يجب أن يكون كل خط رأسي أطول من الذي يسبقه بجزء من ألف وأن يكون الارتفاع المناظر إلى س = ٠ ، بوصة واحدة وذلك لأن المبلغ الذي نبدأ به جنيه واحد .

### الأعداد السالبة

من الواضح أنه يمكن أن نمتد برسمنا البياني إلى قيم س السالبة . إن طول كل خط رأسي يساوي  $\frac{1}{K}$  من طول الخط الذي على يمينه . وعلى بعد ك بوصة يسار س = ٠ . يمكننا أن نرسم خطأ رأسي طوله  $\frac{1}{K}$  من البوصة . وبلاستمرار في هذه العملية يمكننا أن نكمل الرسم البياني وأن نجد ارتفاعاً مناظراً لآية مسافة على اليسار ، أي لقيم س السالبة .

والآن يكون لدينا رسم بياني ممتد إلى أى مدى نشاءه إلى كل من اليمين واليسار .

### تغيير مقياس الرسم

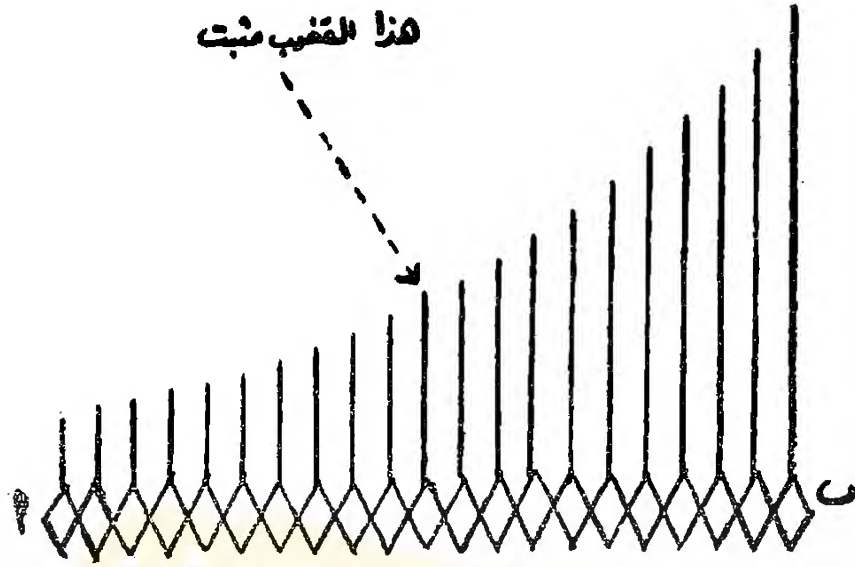
تتوقف المسافة ك على السعر . وباختيار ك المناسبة يمكننا أن نحصل على أى سعر نرغبه . ويجب أن تبقى المسافات بين الخطوط الرأسية متساوية ولكن إذا غيرنا مقدارها فإننا نغير السعر . يمكن إجراء هذا آلياً بالجهاز المبين فى شكل ٢٣ بواسطة فتحات مشغولة فى شكل ماسات . نفرض أن هناك نموذجاً مصنوعاً لهذا بقطع من الخشب المتصلة ببعضها لإتصالاً خفيفاً . فإننا نحتاج إلى تدبير ما ( غير مبين فى الشكل ) ليحافظ على القضبان الرأسية فى الاتجاه الملائم . يمكن إبعاد القضبان الرأسية عن بعضها البعض أو ضغطها بالشد أو بالضغط عند النقطتين ١ ، ب . بهذه الطريقة يكون لدينا نموذج واحد يمثل  $s$  لـ  $1$  عدد ١ ( فى مدى قيم معينة ) .

( قد بولغ فى الشكل فى معدل التغيير ، كل عصا رأسية هى فى الحقيقة واحد من عشرة أطوال من جارتها بدلا من واحد من ألف ) .  $s$  مقاسة بالبوصات . وعند  $s = 1$  ،  $s = 1$  وبذلك



الرسم البياني للدالة  $s = 1$

هذا القضيب مثبت



٢ — ١ — ٠ = س ١ ٢

( شكل ٢٣ )

يكون ١ هو طول القضيب الموجود على بعد بوصة واحدة على  
يمين  $s = 0$  . فمثلاً للحصول على الرسم البياني للدالة  $s = 1$  يجب  
ضغط النقطتين ١ ، ٢ حتى يأتي القضيب الذي طوله ٢ بوصة أعلى  
التدريج ١ الموجود على محور  $s$  . عندما يأخذ النموذج هذا  
الوضع سوف نجد ، على بعد بوصة واحدة يمين أى قضيب قضيباً  
آخر أطوله الضعف .

سوف نسمى النموذج المرسوم فعلاً ، أى الذى فيه طول  
كل قضيب  $\frac{1}{2}$  من طول القضيب الذى يجاوره على اليسار ،

بالنموذج الغير المتقن : سوف نسمى النموذج المشروح هنا والذي فيه النسبة  $\frac{1}{10}$  بالنموذج الدقيق .

يكون النموذج الغير متقن مناسباً للصناعة وللدراسة المدرسية . يجب أن يبقى النموذج الدقيق فقط في الخيلة . كما رأينا في الباب السادس فإن النسبة  $\frac{1}{10}$  ليست قريبة قريباً كافياً من الوحدة لكي تعطى قيمة دقيقة للوغاريتمات .

### اللوغاريتمات

في الباب السادس عرفنا اللوغاريتم بأنه « طول الحبل » الذي يحتاج إليه الفرد لمضاعفة قوته بعدد معين . تناظر المسافة  $s$  ، في الرسم البياني ، طول الحبل ، ويقاس ارتفاع القضيب القائم هناك ( ص بوصة مثلاً ) ، التأثير المضاعف . إننا في الحقيقة نستعمل في النموذج الغير المتقن الأعداد المبينة في الجدول الموجود في « كيف كشفت اللوغاريتمات » . يمكن أن نتخذ  $10 = 1$  للحصول على لوغاريتمات للأساس 10 . ولكن ليس لنا الآن أى غرض في العدد 10 ولنفرض أن النموذج مجهز لآى عدد  $a$  . لذلك فإن

$$ص = 1 \text{ أو } ص = 10$$

## العدد هـ

إذا كانت  $\text{ص} = 1^{\text{س}}$  فما هي  $\text{ص}^{-}$  ؟ اعتبر هذا مع النموذج الدقيق الذى فى مخيلتك . كلما انتقلنا من قضيب إلى الذى يليه تزداد  $\text{س}$  بمقدار  $\text{ك}$  أى أن  $\Delta \text{س} = \text{ك}$  وحيث إن طول كل قضيب يساوى ١,٠٠١ من طول القضيب الذى على يساره لذلك تكون الزيادة فى الطول ،  $\Delta \text{س} = ٠,٠٠١ \text{ص}$  ومن ثم فإن :

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{٠,٠٠١}{\text{ك}} \text{ص} .$$

وهذه تعطينا فكرة عن  $\text{ص}^{-}$  : إنها توحى ( وهذا فعلاً حقيقى ) أن  $\text{ص}^{-}$  تتناسب مع  $\text{ص}$  . إذا أخذنا  $\text{ك} = ٠,٠٠١$  . فإننا نحصل على نتيجة بسيطة :  $\frac{٠,٠٠١}{\text{ك}} \text{ص}$  سوف تساوى فقط  $\text{ص}$  . وبذلك فإن  $\text{ص}^{-} = \text{ص}$  تقريباً .

(لأن  $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$  تساوى تقريباً  $\text{ص}^{-}$  عندما  $\Delta \text{س} = ٠,٠٠١$ )

إننا نعى باتخاذ  $\text{ك} = ٠,٠٠١$  . أن القضبان تبعد عن بعضها بمقدار واحد من ألف من البوصة . من  $\text{س} = \text{صفر}$  إلى  $\text{س} = ١$  يكون طول القضيب الرأسى قد ضرب فى ١,٠٠١ ألف مرة . لذلك يكون طول القضيب عند  $\text{س} = ١$  مساوياً (١,٠٠١)  $1000$

إذا استبدلنا النموذج الدقيق الذى قد درسناه بالنموذج الغير  
 المتقن لكننا قد توصلنا إلى النتيجة (  $1\frac{1}{3}$  ) : يعطى النموذج  
 الدقيق النتيجة الأحسن ، (  $1\frac{1}{3.333}$  ) ومع ذلك إذا اتخذنا  
 عدداً أكثر من القضبان يمكننا أن نحصل على نتائج أحسن .  
 سوف تكون نتيجتنا دائماً فى الصورة (  $1 + \frac{1}{n}$  ) . وكلما كبرت  
 ن اقتربت ص من ص . عندما تصبح ن كبيرة جداً يزداد  
 اقتراب (  $1 + \frac{1}{n}$  ) من العدد ٢,٧١٨٢٨٠٠٠٠ الذى ذكرناه  
 فى الباب الحادى عشر وسميناه ه . إذا كانت ص = ه  
 فإن ص = ص تماماً .

فى الباب الحادى عشر أوجدنا ه بطريقة أخرى ، وذلك  
 باختيار ١ لـكى تعطى أبسط النتائج عندما نفاضل لوغاريتم  
 الأساس ١ . وحيث إن ص = ١ هى نفس الشيء مثل  
 س = لو ص فليس غريباً أن يعطى نفس العدد ه أبسط  
 النتائج فى كلتا الحالتين . ربما يتمكن القارىء أن يبين أن الطريقتين  
 هما حقيقة نفس الشيء . نشأ الاختلاف الوحيد نتيجة وضع س  
 بدلا من ص . فرضنا فى الباب الحادى عشر أن ص = لو س  
 وهنا س = لو ص .

## متسلسلة هـ

لدينا الآن بيانات عن هـ تكفي لإيجاد متسلسلها عند  
 $س = 0$  ،  $س = 1$  ، وإذا كانت  $ص = هـ$  فإن  $ص = هـ$   
 إن الطريقة التي استعملت لإيجاد متسلسلة الدالة جتا س تنفع تماماً  
 مع هـ . سوف نجد أن :

$$هـ = 1 + س + \frac{1}{2} س^2 + \frac{1}{6} س^3 + \frac{1}{24} س^4 + \frac{1}{120} س^5 + \frac{1}{720} س^6 + \dots$$

فاضل هذه المتسلسلة لنفسك وتحقق أن متسلسلة ص هي  
 نفسها متسلسلة ص وبذلك فإن  $ص = هـ$  .  
 يمكن أيضاً تطبيق هذه الطريقة ، التي ترتبط بأسماء تيلور  
 ومكلورين على دوال أخرى كثيرة .

للدالة  $س$  خواص بسيطة مشتركة مع الدالة هـ . وذلك  
 لأنه كما رأينا يمكن استنتاج الرسم البياني للدالة  $س$  من الرسم  
 البياني للدالة هـ فقط بتغير مقياس رسم س ( بدفع أو سحب  
 النقطتين 1 ، 2 الموجودتين في النموذج ) .



## تطبيقات على هـ

إن أهمية هـ ترجع إلى الخاصة  $ص = ص$  أى أن معدل ازديادها يساوى مقدارها ولذا أخذنا هـ بـ بدلاً من هـ حيث  $ب$  أى عدد معين فإن  $ص = ب ص$  ، أى أن معدل الزيادة يتناسب مع قيمة الدالة نفسها .

هناك أشياء كثيرة تتزايد بهذه الطريقة سبق أن ذكرنا مثالا عن عملية الربا التى ترجح بها الألف جنيه ١٠٠٠ ضعف ما يربحه الجنيه الواحد .

كثيراً ما يحدث نفس الشيء فى الأعمال التجارية فكلما ازداد عدد المحال التجارية التى تملكها شركة ازدادت مقدرتها على إتمام عملها .

إذا رغبت بلدة فى تنمية صناعاتها وبدأت بالقليل من الأجهزة فإنك تجد أن المعدل الذى تقيم به مصانع جديدة بطيء للغاية ، ولكن إذا ما زاد ما لديها من المصانع زادت إمكانياتها فى تجهيز مصانع جديدة . العكس صحيح مع بلدة تعاني من الإحتلال الأجنبي إذ كلما خسرت البلدة مصانعها قلت إمكانياتها فى تعويض ما تخسره .

يزداد تعداد بلدة ، تحت الظروف العادية ، طبقاً للقانون  
س . فكلما زاد عدد الأهالي في البلدة ازداد عدد الأطفال  
المحتمل ولادتهم . إن تعداد الولايات المتحدة الأمريكية ما بين  
عام ١٩٧٠ وعام ١٨٩٠ كان يعطى تقريباً طبقاً للقانون :  
ص = ٣,٩ × ١٠<sup>١٢</sup> و س حيث ص هو التعداد بالملايين ، س  
عدد السنين بعد عام ١٧٩٠<sup>(١)</sup> . يبطل بالطبع العمل بالقانون  
هندما تصل البلدة إلى المرحلة التي فيها لا يمكنها إعالة أية زيادة في  
الأهالي . هناك اعتبارات مشابهة يمكن تطبيقها على المعدل الذي  
تتكاثر به المكروبات في زجاجة لبن أصابه الفساد . كما يطبق مع  
انتشار الآرانب في أستراليا ومع صور أخرى للتكاثر .

هناك أيضاً حالات يتبع فيها انتشار ديانة جديدة أو مذهب  
سياسي قانون الدالة الأسية . فإذا كان هناك عدد كبير من الأهالي  
في حالة تسمح لهم بقبول تعاليم جديدة بمجرد عرضها عليهم  
فإن انتشار تلك التعاليم يعتمد إلى حد كبير على عدد الرجال  
والنساء الذي يقومون بدور المبشرين لها . فإذا كان صاحب  
الرسالة في عزلة فلا يمكن أن يؤثر إلا على هؤلاء الذين في منطقته ،  
ومع كل مهتد إلى الدين تزداد قدرته على إسماع نفسه . إنه من

---

(١) مقدمة للرياضيات مؤلفه كولي ، جانز ، كلين وهلرت ص ٣٦٣ .

الممكن أن نذكر حالات تبين فيها الاحصائيات أن حركة ما قد اتبعت قانون الدالة الأسية في أثناء نموها بالطبع مع بعض التغيرات الطفيفة الناتجة عن أسباب أخرى وأحداث خاصة ساعدت أو عرقلت الحركة . إن نمو حركة بهذه الطريقة في فترة معينة لا تخبرنا بشيء بالمرّة عن آمالها المستقبلية . ربما تحطمها زعامة فاسدة ، أو استيقاظ لعناصر مضادة ، أو قوة أعلى ، أو مجرد سوء حظ . عندما تحقق الأحداث قانوناً رياضياً فهذا يعني أنه كان هناك بعض العوامل المؤثرة في فترة معينة : وكلما تعددت العوامل المتسببة ازداد الرسم البياني للحركة تعقيداً .

يمكن تطبيق الدالة الأسية على الموضوعات البعيدة عن التعقيدات الموجودة في حياة الإنسان أو الحيوان . فكثير استعمالها في العلوم المتصلة بعالم الجماد كما في إيجاد سرعة جسم متحرك ضد مقاومة الهواء ، أو ضغط الهواء على ارتفاعات مختلفة ، أو ذبذبات دائرة كهربائية ، أو مرور التيار في دائرة كهربائية أو تلاشي الذبذبات . في هذه وفي مسائل أخرى لا حصر لها ، تزداد بعض الكميات أو تقل بمعدل مناسب مع مقدارها . حقيقة أنه جدير بالملاحظة مقدار ما يمكن وصفه في عالم الطبيعيات ، وهو خاص بعوامل متناقضة لمجموعة كبيرة من القوى الغير المرتبطة ، بواسطة أبسط الدوال الرياضية ، سن ، هـ .

## الباب الخامس عشر

### الجذر التربيعي لناقص واحد

«الرأى السائد عن الرياضة أنه يجب عليك أن تعرف السبب أولاً ثم تعرج إلى التطبيق ، وهذا كلام لا أساس له ، فإني أعرف من العمليات الرياضية ما استخدمته بنجاح زمناً طويلاً دون أن أفهم أو يفهم غيرى مدلولها المنطقي ، لقد تعودت على هذه العمليات وفهمتها على هذا الوضع .»

«أولفر هفيسايد»

في نهاية الباب الخامس لاحظنا أن مربع كل عدد كانت إشارته موجبة ولم نجد عدداً مربعه  $-1$  . وكان من الطبيعي أن يتوقع الإنسان انتهاء الموضوع عند هذا الحد، وأن يعترف علماء الرياضة أن أية مسألة تؤدي إلى المعادلة  $x^2 = -1$  ليس لها معنى ولا حل .

لكن حدث شيء عجيب . فمن وقت لآخر لاحظ علماء الرياضة أنه يمكن اختصار العمل كثيراً مع الحصول على الإجابة الصحيحة إذا استخدموا الرمز  $i$ ، حيث  $i^2 = -1$ ، واعتبروا

ت في جميع الحالات الأخرى تماماً كأي عدد طبيعي . نفذ هذا لأول مرة حوالي عام ١٥٧٢ وكان هناك شك كبير في هذه الطريقة التي استمرت في إعطاء نتائج صحيحة . لم يعرف أحد سبباً لذلك لكن الرموز قد برهن أنه مفيد لدرجة أن علماء الرياضة استملوه لمدة قرنين بدون أن يحقق لهم غير النجاح .

وفي عام ١٨٠٠ لم يعرف أي معنى منطقي للرموز ( نجد القصة بأكملها في عدد دانزج ، لغة العلم ) .

إذا سمحنا في الوقت الحاضر واعتبرنا كعدد طبيعي فإنه يمكننا معرفة نوع النتائج التي حصل عليها علماء الرياضة في القرن الثامن عشر .

في الباب الرابع عشر وجدنا متسلسلات لكل من الدوال هـ س ، جتا س ، جاس ربما قد لاحظت تشابه المعاملات التي ظهرت في هذه المتسلسلات في الحقيقة إذا اعتبرنا متسلسلة هـ س .

$$1 + s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{24}s^4 + \dots$$

وإذا كتبنا حداً منها وتركنا الآخر فإننا نحصل على :

$$1 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{24}s^4 + \dots$$

فإذا جعلنا الإشارات على الترتيب + ثم - ، فإننا نحصل على



متسلسلة جتا س . بنفس الطريقة فإن جا س تناظر النصف الآخر من الحدود .

وباستعمال الرمز ت يمكننا أن نرى العلاقة بين الثلاث متسلسلات في قانون واحد .

دعنا نفرض أن س أخذت القيمة ت ١ حيث ١ أى عدد بوضع س = ت ١ فى متسلسلة هـ س نحصل على .

$$هـ ت^1 = 1 + ت + \frac{1}{2} ت^2 + \frac{1}{6} ت^3 + \frac{1}{24} ت^4 + \dots$$

حيث إن  $ت^2 = 1 - ت$  ،  $ت^3 = ت - ت^2 = ت - (1 - ت) = 2ت - 1$  ،  $ت^4 = ت^2 \times ت^2 = (1 - ت)(1 - ت) = 1 - 2ت + ت^2$  فإن كل قوى ت التالية تتحول بالترتيب إلى ١ ، ت ، ١ - ، ت - ، وعلى ذلك

$$فإن هـ ت^1 = 1 + ت + \frac{1}{2} ت - \frac{1}{6} (2ت - 1) + \frac{1}{24} (1 - 2ت + ت^2) + \dots$$

فإذا فرزنا الحدود التى فيها ت من الخالية من ت ، نجد أن الحدود الخالية من ت تعطى متسلسلة جتا ١ بينما الحدود التى فيها ت تساوى ت من المرات متسلسلة جا ١ . بالإختصار :

$$هـ ت^1 = جتا ١ + ت جا ١ .$$

هذه فى الحقيقة نتيجة مفاجئة من دالة بسيطة مثل هـ س .

إننا نجد دوال من هذا النوع في مقرر الحساب في أثناء دراسة  
الربح المركب . يقع العدد هـ بين ٢ ، ٣ وهو حوالى ٢.٧ .

تختلف جتا ١ عن جا ١ اختلافاً تاماً . أول ما تقابلهما تجدهما  
مرتبطتين في الهندسة كأضلاع في مثلث قائم الزاوية . ليس لدينا  
أى سبب بالمرّة يجعلنا نتوقع ارتباطهما بقانون جبرى بسيط :  
في الحقيقة يغمض على معظم الناس الطريقة التى حسبت بها  
جداول جا ١ .

تبين الصيغة السابقة أن للكميتين جتا ١ ، جا ١ صلة وثيقة  
جداً مع أبسط أنواع الدوال . للدالة هـ خواص بسيطة كثيرة،  
فمثلاً هـ ق . هـ ك = هـ ق + ك حيث ق ، ك أى عددين .  
إذا أخذنا ق = ت ، ك = ت فإننا نحصل على النتائج الآتية .

$$هـ ت ١ = هـ ت = هـ ت (١ + ت) .$$

أى أن :

$$(جتا ١ + ت جا ١) (جتا ت + ت جا ت)$$

$$= جتا (١ + ت) + ت جا (١ + ت)$$

بمساواة الحدين الخاليين من ت في كلا الطرفين نحصل على أن :

$$جتا (١ + ت) = جتا ت - جا ١ جا ت$$

وبمساواة معامل ت في كلا الطرفين نحصل على :

$$جا (١ + ب) = جا ١ جتا ب + جتا ١ جا ب$$

يمكن الحصول من خواص هـ س على جميع قوانين الجيوب وجيوب التمام الموجودة في حساب المثلثات بدون جهد كبير . وباستعمال هذه الطريقة يمكن تخفيف العبء على الذاكرة فبدلاً من أن يحفظ الإنسان قوانين يمكن أن يستخدمها وقتما يحتاج إليها باستعمال هـ تـ ا .

من السهل أن نوجد القوانين التي تعطى جتا ١ ، جا ١ بدلالة هـ تـ ا في الحقيقة جتا ١ =  $\frac{1}{2}$  ( هـ تـ ا + هـ - تـ ا ) وبذلك يمكننا تحويل أية مسألة على جيوب التمام إلى مسألة على دوال أسية . فثلاً يمكننا بهذه الطريقة أن نوجد جتا س و س لانه من السهل تكامل الدال الأسية .

يمكن اعتبار كل المسائل التي على الجيوب وجيوب التمام وكأنها مسائل على الدوال الأسية . بذلك نوفر على أنفسنا مجهود استذكار طرق خاصة لإيجاد الجيوب وجيوب التمام . ومن ثم فإن ت وسيلة ذات فائدة عظيمة وكما ذكر في الباب الخامس ، كثيراً ما يستعملها المهندسون الكهربائيون .

## ماهى ت

يبدو غريباً لأول وهله أن يكون الجذر التريعى لناقص واحد ، وهو شىء لم يره أحد قط ويبدو فى ذاته أنه مستحيل ، مفيداً إلى هذا الحد : فى تصميم المولدات والمحركات الكهربائية ، الإضاءة الكهربائية وأجهزة اللاسلكى .

عندما تصدمنا حقيقة ما عادية وتبدو كشىء غريب فهذا يعنى أننا ننظر إليها من وجهة نظر خاطئة . إذا وجدنا أن الكون غامض فلأن فكرتنا عنه ليست صحيحة ، وحينئذ نفاجأ عندما نجد أنه شىء آخر مختلف تمام الاختلاف . الخطأ ناتج عن فكرتنا الأصلية لا من الكون .

عندما نجد أن ت غامضة فلأننا نعتبرها عدداً طبيعياً ولكننا قد اقتنعنا فى الباب الخامس أنه لا يوجد العدد س يحقق العلاقة  $s^2 = 1$  .

أيضاً قد رأينا أن الرمز ت الذى يحقق العلاقة  $s^2 = 1$  يودى إلى نتائج صحيحة للغاية وذات معنى واضح . إنه من المستحيل أن تكون ت عدداً وليس هناك أى تناقض بالمرءة إذا فرضنا ت شيئاً ما آخر . وفى الحقيقة يمكن اعتبارها كموثر .

تعني أية عملية إجراء عمل ما : اقلب البيانو رأساً على عقب .  
تتحرك خطوتين لليمين « اطرده مستر جونز » هي أمثلة لعمليات  
على البيانو وعلى جندي وعلى مستر جونز . إذا استعملنا  $y$   
كاختصار للعملية « اقلب رأساً على عقب » ،  $q$  للبيانو يكون  
للمعملية  $yq$  نفس معنى الجملة الأولى المعطاة سابقاً .  $y$  تسمى  
مؤثر . يمكن تكرار العملية فتعني  $yq$  اقلب البيانو رأساً  
على عقب ثم اقلبه رأساً على عقب مرة أخرى ، وهذا يعني ارجع  
البيانو لوضعه الأصلي . في المعتاد يرمز إلى  $y$  بالرمز  $y^1$  ، إلى  
 $yq$  بالرمز  $y^2$  . ملح حيث إن اقلب البيانو رأساً على عقب  
مرتين يتركه في وضعه الأصلي ، فإن  $yq = q$  .  
أي  $y^2 = q$  . ومن المناسب . أن نستعمل الرمز  $I$  للعملية التي تترك  
الشيء كما هو . على ذلك فإن  $Iq$  تعني نتيجة ترك البيانو كما هو أي في  
موضعه الأصلي  $q$  ولذلك  $y^2 = q = Iq$  . هذا النوع من العمليات  
ليس فقط صحيحاً للبيانو ، إنما ينطبق على أي جسم صلب آخر  
( بالطبع لا ينطبق على كوب به ماء ) . يعبر عن هذا بالمعادلة  
 $y^2 = 1$

سوف ترى أنه الممكن تماماً أن نناقش العمليات ، وأن نحصل  
على نتائج عنها ، وأن نتحقق من صحتها بمنطق سليم بحت ، سوف  
ترى أيضاً أن هذه النتائج عند كتابتها برموز الجبر المختصرة



تشبه المعادلات العددية ويمكن بسهولة أن تتخذ خطأ على أنها بيانات عن الأعداد . في الحقيقة إنه هذا الخطأ هو بالذات الذي وقعنا فيه فيما يختص بالمعادلة  $1 = 2$  . لتجنب أى سوء فهم من هذا النوع سوف نطبع كل الرموز التي تمثل العمليات بحروف كبيرة من الآن فصاعد . سوف نكتب  $T$  بدلاً من  $t$  لكي نفرق بين الرمز والعدد . وبالرغم من أن المؤثرات ليست أعداداً لكن كثيراً ما تكون مرتبطة بالأعداد . ففي الآلة الحاسبة مثلاً لدينا عدداً من العجلات المسننة المركبة بنفس الطريقة الموجودة في عدادات العربات . وفي كل مرة تقطع العربة ميلاً تدور العجلة الممثلة للوحدات تقسيماً واحداً ، وذلك يضيف وحدة للمسافة المقطوعة . دوران العجلة عملية وهذه العملية تناظر إضافة وحدة المسافة المقطوعة ، وبسبب التناظر بين الأعداد والعمليات الميكانيكية الخاصة أصبح من الممكن صناعة الآلات الحاسبة .

سوف نبحث الآن عن مجموعة من المؤثرات  $1, 2, 3, \dots$  التي تناظر عن قرب  $1, 2, 3, \dots$  في الحساب العادي .  $1, 2, 3, \dots$  ليست أعداداً ولكن هناك علاقات كثيرة بين هذه المؤثرات تناظر تلك التي بين الأعداد الطبيعية ، لها أنموذج مشترك مع الأعداد الطبيعية تماماً كالأنموذج المشترك بين أسرة من أب وابن وابنة في مستعمرة قروود ، وأسرة من أب

وأم وابن وابنة في برمنجهام هذا لا يعنى أن في برمنجهام كل فرد فرد .

سوف نجد أنه من الطبيعى تماماً أن ندخل العملية ت بحيث

يكون  $t^2 = 1$

### المؤثرات ١ ، ٢ ، ٣

لكي نعرف المؤثرات ١ ، ٢ ، ٣ . . . نتخيل عصا طويلة مدرجة من الخشب وأن واية نقطة ثابتة موضوع على يمينها الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ إلخ على أبعاد ١ ، ٢ ، ٣ بوصة . أما على يسارها فنضع الأرقام ١ - ، ٢ - ، ٣ - إلخ على أبعاد ١ ، ٢ ، ٣ بوصة . هذا تدرج عادى كالذى يوجد على أى ترمومتر .

ثبت أحد طرفى سلك عند و بحيث تنزلق عليه خرزة ١ . يمكن للسلك أن يشير إما لليمين وإما لليسار . تتكون العمليات التى سوف نعتبرها إما من إدارة السلك من إتجاه إلى الآخر وإما من إنزلاق الخرزة ١ على طول السلك .

يمكن الآن تعريف العملية ٣ . إنها تتكون من حركة الخرزة ١ إلى نقطة على السلك على بعد من ويساوى ضعف بعدها الأول عن و . يمكن وصف العملية ٣ فى كلمات « ضاعف المسافة و ١ »

بنفس الطريقة تعنى العملية ٣ د ضاعف و ١ إلى ثلاثة أمثال ،  
تعنى  $٣ \frac{٧}{٨}$  ، د ضاعف و  $٣ \frac{٧}{٨}$  من المرات ، ، تعنى س د ضاعف  
و ١ س من المرات ، حيث س أى عدد موجب تعنى ١ د اترك  
١ فى مكانها ، .

يمكن إجراء عدة عمليات متوالية ، مثلاً تعنى العملية  
(٤) (٣) (٢) مضاعفة الطول و ١ ثم زيادته إلى ثلاثة أمثال ثم  
بعد ذلك إلى أربعة أمثاله . وباختصار يجب زيادة و ١ إلى أربعة  
وعشرين ضعفاً من طوله الأصلى . تكافئ الثلاث عمليات على  
التوالى العملية (٢٤) .

$$٢٤ = (٢)(٣)(٤)$$

لذلك فإن هناك تناظراً كبيراً بين إجراء عمليات متعددة  
متوالية وبين عملية ضرب الأعداد الطبيعية . ويمكننا أن نقول إن  
للعمليات نفس جدول ضرب الأعداد الطبيعية .

تفهم من العملية — ١ أن إتجاه السالك قد عكس ولكن  
المسافة و ١ لم تنغير . وبذلك إذا كانت ١ أصلاً فوق الرقم ٣ ،  
سوف تتسبب العملية — ١ فى نقلها إلى الرقم — ٣ . وإذا كانت  
١ أصلاً فوق الرقم — ٣ ، تنقلها العملية — ١ إلى ٣ .

تفهم بالعملية ، — س أن المسافة و ١ قد تضاعفت س من  
المرات فى الاتجاه العكسى .

حقق بنفسك أن  $(-2)(-3) = (3)(-6)$  ،  
 $(-2)(-5) = 10$  . تماثل قواعد ضرب المؤثرات + ، -  
 قواعد ضرب الأعداد الطبيعية .

### الجمع

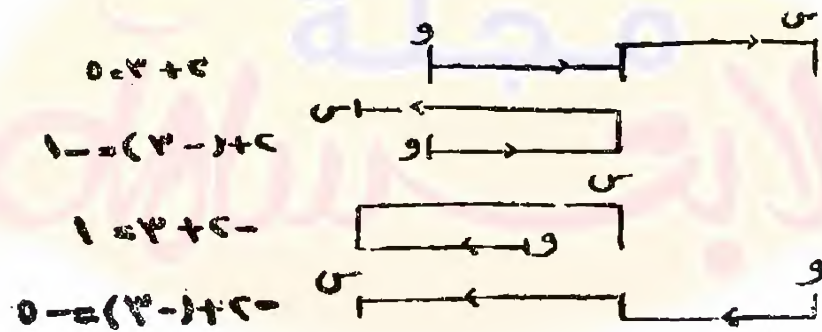
كيف نجد معنى  $2 + 3$  أو  $2 + (-3)$  ؟ يمكننا أن نقول  
 مباشرة إن  $2 + 3$  هي ٥ وإن  $2 + (-3)$  هي -١ . أى أنه  
 يمكننا استعمال الحساب العادى كطريقة لتعريف جمع المؤثرات  
 ولكن هذه سوف تعوقنا . عند إعتبار العددي الذى لا يناظره  
 أى عدد طبيعى ، سوف لا نعرف كيف نتخذ ١ + ت .  
 لذلك كان من الأوفق أن نبحث عن طريقة أخرى تنطبق  
 على العمليات مثل ت وفي نفس الوقت لا تتعارض مع الطريقة  
 الأولى للمؤثرات التى تناظر الأعداد الطبيعية .

نفرض أن الخريزة كانت فى البداية عند النقطة ق وأن ك  
 هى النقطة التى تنتقل إليها ١ بعد العملية ٢ ، ر هى النقطة التى  
 تنتقل إليها ١ بعد العملية ٣ ، س هى النقطة التى تنتقل إليها ١ بعد  
 العملية ٥ . وبذلك فإن و ك = ٢ . وق ، ور = ٣ . وق ،  
 وس = ٥ . وق (وق هى المسافة من وإلى ق ، ٢ ، ٣ ، ٥ هى الأعداد

الطبيعية : لا يوجد مؤثرات في هذه المعادلات ) . من الواضح أن  $س = و + ك$  ، و  $ور$  بحيث إنه يمكننا إيجاد موضع  $س$  بوضع الطولين  $و$  ،  $ور$  على استقامة واحدة .

بنفس الطريقة يمكننا معرفة تأثير العملية  $٢ + (٢ -)$  . يجب أن نذكر أنه سوف تسبب  $٢$  ،  $-٣$  في جعل  $و$  يتجه في اتجاهين مختلفين : عندما نضع الطولين على استقامة واحدة يجب أن يكون اتجاه الطول الثاني مضاد للأول .

يساعد شكل ٢٤ في توضيح هذه العمليات .



( شكل ٢٤ )

ونتيجة لذلك سوف نتجه لتعريف الجمع كالتالي . إذا نقلت العملية  $س$  النقطة  $١$  من  $ق$  إلى  $ك$  ، ونقلت العملية  $ص$  النقطة  $١$  من  $ق$  إلى  $ر$  ، فإن  $س + ص$  هي العملية التي تنقل  $١$  إلى  $ع$  حيث  $ع$  هي النقطة التي نحصل عليها بوضع  $و$  ،  $وق$  على استقامة واحدة .



يمكننا إختصار ٢ + (٣ -) ، في الصورة ٢ - ٣ . كما يجب التمييز بين ٢ - ٣ ، (٢) (٣ -) . تعني (٢) (٣ -) أنه يجب تطبيق العملية ٢ على نتيجة تأثير ٣ - على ١ .

لقد توصلنا الآن إلى مجموعة من المؤثرات التي تناظر الأعداد الطبيعية : يمكن ضربها وجمعها مع تشابه النتائج المناظرة للأعداد الطبيعية فقط تبدو بخط بارز . فإذا انتزعنا صفحة فيها حسابات تتعلق بهذه المؤثرات فلربما تخطئ ونعتبرها نماذج على مبادئ الحساب كتبت بفرد ما ضغط بشدة على القلم : ليس هناك أية طريقة للتمييز بين الإثنين .

### المؤثرات

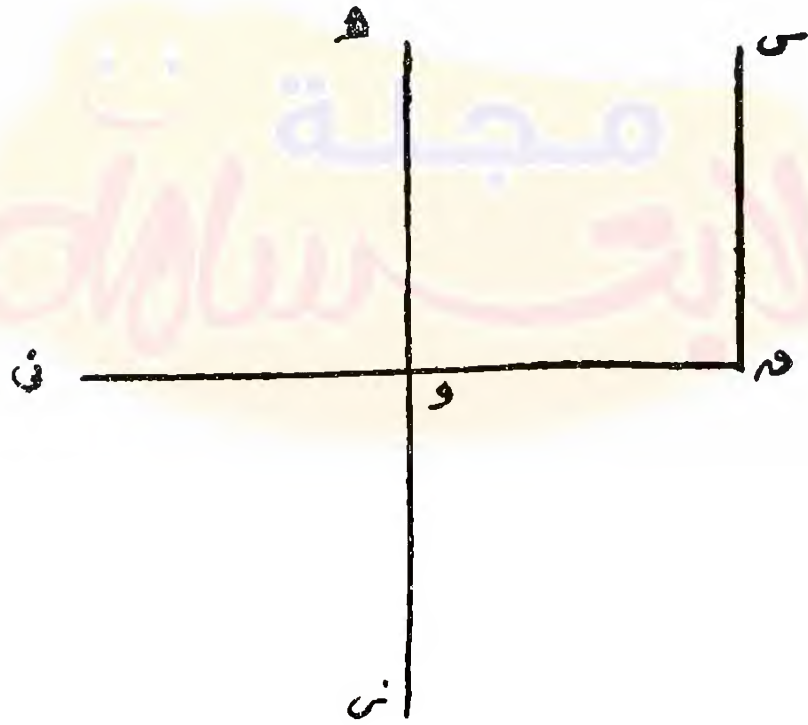
تعكس العملية ١ - اتجاه و ١ ، بدون أي تغيير في طوله ٦ أي أنها تدير و ١ بزاوية ١٨٠° . هل يمكننا إيجاد عملية ت بحيث يكون  $t^2 = -١$  ؟

تعني  $t^2$  أن العملية ت قد أجريت مرتين . يتطلب السؤال أن نجد عملية ما إذا أجريت مرتين ندير و ١ بمقدار ١٨٠° .

السؤال الآن في غاية السهولة . تتركب العملية الغامضة ت من دوران و ١ بزاوية ٩٠° ، في شكل ٢٥ فرضنا أن ١ كانت في

البداية عند ق . تنقل العملية ت ، ١ إلى هـ . تنقل ت<sup>٢</sup> ، ١ إلى ف  
تنقل ت<sup>٢</sup> ، ١ إلى ز ، ترجع ت<sup>٤</sup> ، مرة أخرى إلى ق . تنقل - ١ من  
ق إلى ف وبذلك فإن ت<sup>٢</sup> = - ١ كما توقعنا .

قبل أن نتعرض إلى ت كانت الخرزات تتحرك على خط مستقيم  
وكان من الممكن أن تقع على يمين أو يسار ، ولكن دائما في  
نفس المستوى .



( شكل ٢٠ )

والآن وقد أدخلنا فإنه من الممكن للنقطة ١ أن تقع أعلى أو أسفل و . وفي الحقيقة سوف يكون أن تتحرك ١ على سطح الورقة بأجمعه .

## الجمع

الآن يمكن استعمال طريقة الجمع « على استقامة واحدة »  
لنعطى معنى للكميات مثل ١ + ت ، ٢ + ٣ ت

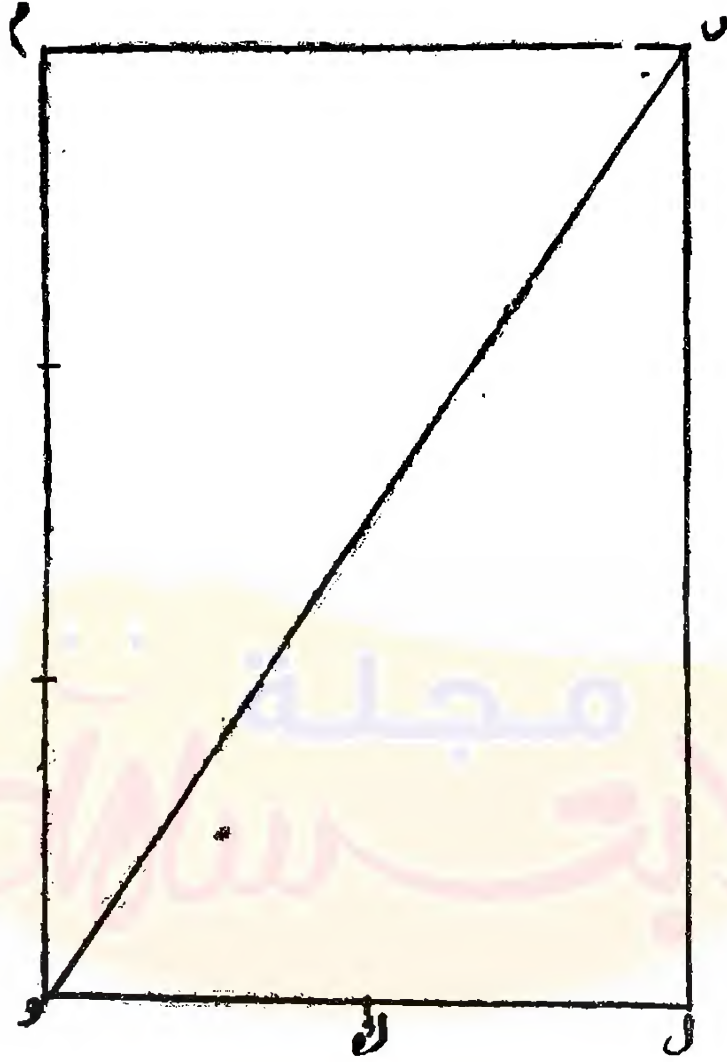
نفرض كما سبق أن الخرزة ١ كانت عند ق ثم أثنا عليها  
بالعملية ١ + ت (ش ٢٥) . فإلى أين تتحرك ؟ علينا إيجاد النقطة  
ك ، ر التي تنقل ١ إليها بواسطة ١ ، ت ثم نضع و ك ، ور على  
استقامة واحدة تترك العملية ١ عند ق وتنقل العملية ت إلى  
ه . وبذلك تكون ك هي ق ، ر هي ه .

علينا وضع وق ، وه على استقامة واحدة . عند ق ترسم ق س  
مساويا وه وله نفس الاتجاه مثل وه . هذا يعطينا النقطة س التي  
نريدها . تنقل العملية ١ + ت ١ من ق إلى س . ولابدأت ١ من  
أية نقطة أخرى يمكننا معرفة المكان الذي تنقلها إليه العملية  
١ + ت (مثلا إذا بدأت الخرزة عند ه فإلى أين تنقل بها  
١ + ت ؟) .

يمكن بنفس الطريقة دراسة العملية ٢ + ٣ ت . ويمكن  
للخزرة ١ أن تبدأ من أية نقطة على الصفحة مثلاً ك ( ش ٢٦ ) .  
علينا بدراسة العمليتين ٢ ، ٣ ت على انفصال ثم ربطهما سوياً  
بطريقة الجمع د على استقامة واحدة ،

تنقل العملية ١ ٢ من ك إلى ل . وعندما تؤثر ٣ ت على ١ فإنها  
تدير و ١ بزاوية ٩٠° مع زيادته إلى ثلاثة أمثال طوله . وبذلك تنقل  
٣ ت ١ من ك إلى م . والآن يجب وضع و م عند نهاية و ل . نرسم  
ل ن مساوياً و م وفي نفس اتجاه و م . تكون ن هي النقطة المطلوبة  
تنقل العملية ٢ + ٣ ت ١ من ك إلى ن . يمكننا اختيار ك في أى  
مكان . وباختيار ك في مواضع مختلفة يمكن ملاحظة أماكن  
المناظرة . ربما تلاحظ أن الزاوية ك و ن لا تتغير أبداً وأن نسبة  
و ن إلى و ك ثابتة لا تتغير مع موضع ك . بمعنى آخر مهما كان  
موضع الخزرة ١ تدير العملية ٢ + ٣ ت و ١ بنفس الزاوية  
وتضاعف طوله نفس عدد المرات .

يمكننا أن نتصور أية عملية أ + ب ت وكأنها عملية دوران  
بزاوية معينة يتبعها زيادة في الطول . إذا كانت ١ + ب ت تناظر  
دوران بزاوية مقدارها  $\frac{\pi}{2}$  وزياد في الطول بمقدار ر من المرات .  
فإنه يكون من السهل استنتاج أن ١ + ر جتا  $\frac{\pi}{2}$  ؛ ب = ر حا  $\frac{\pi}{2}$   
فإذا كان لدينا ١ ، ب يمكننا إيجاد ر ،  $\frac{\pi}{2}$  بياناً و ذلك برسم مثلث



(شكل ٢٦)

قائم الزاوية فيه ١ ، ب ضلعان . تسمى ربالمقياس  $\square$  ؛ بسعة العملية  
 ١ + ب ت . لقد أعطيت هاتين الكميتين أسماء خاصة إذ أنها  
 كثيراً ما تأتي في القوانين : وبذلك نوفر وقتاً ليس بقليل .



والآن أنت في حالة تسمح لك أن تفكر بنفسك في هذه العمليات . لقد أوضحنا بالأمثلة ١ + ت ، ٢ + ٣ ت وطريقة الحصول على أية عملية تمثلها الصورة أب + ت . والآن أنت تفهم معنى هذه الرموز ومتروك لك أن تمارس بنفسك إجراء مثل هذه العمليات . ماذا تفهم بالعمليات ١ + ٢ ت ، ١ - ٣ ت إذا أجريت عمليتين متتاليتين هل يؤثر الترتيب الذي تجرى به هاتين العمليتين ؟ هل ( ٢ ) ( ت ) هي نفسها ( ت ) ( ٢ ) ؟ هل ( ١ + ت ) ( ٢ + ت ) هي نفسها : ( ١ + ٢ ت ) ( ١ + ت ) . بالأجراء الفعلي للعمليات الهندسية أوجد عملية واحدة لها نفس النتيجة مثل ( ١ + ٢ ت ) ( ١ + ت ) ما هو مقياس ت ؟ مقياس ٣ + ٤ ت ؟ هل ( ت ) ( ت ) = ( ت - ) ( ت - ) ما هو ( ت ) ( ت - ) ؟

تعني ( ت - ) العملية ( - ) ( ت )

بمجرد إعطائنا معنى محدد للرموز فإننا نفقد كل السيطرة عليها يمكننا أن نقرر الاسم الذي نعطيه لأي عملية ، و لكن بمجرد اختيار الاسم علينا أن نلاحظ ما يفعله ذلك المؤثر . لقد وصلنا

لهذه المرحلة إذا أعطينا الأسماء ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ت لمؤثرات خاصة وشرحنا ما نعنيه عندما نكتب مؤثرين متجاورين أو مرتبين بالإشارات + ، - . تعنى القسمة العملية العكسية للضرب. الرمز الوحيد الذى لم يعط بعد أى معنى هو  $s$  الذى سوف نرجع له مستقبلاً . ولكن قد استقر الأمر على كل شيء يختص بالجمع والطرح أو الضرب والقسمة . ويجب ألا نفترض أن هذه الرموز الجديدة تتبع نفس قواعد الأعداد الطبيعية : لأنها ليست أعداداً طبيعية وعلينا أن نجرب لنرى ما إذا كانت أم لا .

مثلاً يجب ألا نفترض أن ( ٢ ) ( ت ) هى نفسها

( ت ) ( ٢ ) . حقيقة إن ( ٢ ) ( ت ) تساوى ( ت ) ( ٢ ) ولكن يجب أن نحاول ذلك بالتجربة . هناك مؤثرات تتغير نتائجها تبعاً للترتيب الذى تحدث به . إن التأثير الناتج من الضرب على الجسم ثم على الرأس يختلف عن التأثير الناتج من الضرب على الرأس ثم على الجسم .

الشيء الذى يهمنا فى المؤثرات التى نحن نصدرها الآن هو أنها تتبع قوانين الأعداد الطبيعية . إذا كان أى قانون صحيحاً مع الأعداد الطبيعية فإنه سوف يكون صحيحاً مع هذه المؤثرات. مثلاً  $(s + 1)(s - 1) = s^2 - 1$  حيث  $s$  عدد طبيعى

إذا استبدلنا س بأى مؤثر  $1 +$  ب نجد أن النتيجة لا تزال صحيحة . فمثلاً بوضع ت مكان س فإن  $(1 + ت) (1 - ت) = ت^2 - 1$  ، تكون صحيحة . لكن  $ت^2 = 1 -$  لذلك  $ت^2 - 1 = 2 -$  سوف نجد أن نتيجة لإجراء العمليتين  $1 -$  ،  $1 +$  على الترتيب هى مضاعفة الطول و  $1$  وإدارته بزاوية  $180^\circ$  أى نفس إجراء العملية - ٣ .

سوف تجد أيضاً أنه ليس من المهم الترتيب الذى نجرى به عمليات الضرب أو الترتيب الذى نجمع به الرموز  $2, 2$  ت لهما تماماً نفس المعنى ( نعنى بالضرب لإجراء العمليات واحدة بعد الأخرى )  $1 +$  لهما نفس المعنى مثل  $1 + ت$  ( إنه ليس من المهم أن خطأ يوضع عند نهاية الآخر عند الجمع على استقامة واحدة .

باختصار أية قاعدة صحيحة مع الأعداد الطبيعية تكون صحيحة مع هذه المؤثرات . هذه حقيقة تناسبنا جداً . عندما نبدأ فى دراسة نوع جديد من العمليات كثيراً ما تقابلنا قوانين لم نرها من قبل . كل فرع من نوع العمليات له طريقته الخاصة التى يتبعها وعليها

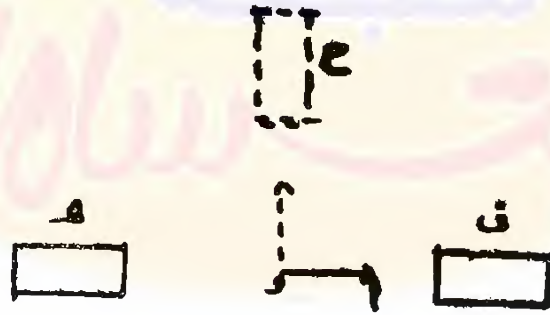
أن نعتاد عليها . ولكننا لسنا مضطرين لدراسة أية قوعد جديدة للمؤثرات  $1 + b$  . إنها تتبع تماماً قوانين الأعداد الطبيعية : وبالرغم من أنها في الحقيقة ليست أعداداً ، فهي تشترك في الكثير معها للدرجة يمكن اعتبارها في معظم الأغراض أعداداً . يسميها علماء الرياضة في المعتاد الأعداد المركبة ليبينوا أنها على صلة وثيقة بالأعداد الطبيعية : إذا . اعتبرت  $t$  في حساباتك عدداً طبيعياً فسوف تحصل على نتائج صحيحة .

من الناحية الأخرى باعتبار  $t$  مؤثراً ، كثيراً ما يمكنك الحصول على نتائجك بسرعة أكبر مما إذا استعملت الطرق العادية في الحساب . مثلاً قد يطلب منك حل المعادلة  $s^2 = t$  . إننا نعلم أن  $t$  تمثل دوراناً بزاوية قائمة والآن نتساءل ما هي العملية  $s$  التي إذا أجريت مرتين يكون لها نفس التأثير مثل  $t$  ؟ الجواب واضح . اصنع زاوية مقدارها  $45^\circ$  . هذه العملية لا تشمل أي زيادة في الطول أي أن المقياس  $r = 1$  ( إذا لم يوجد هناك زيادة في الطول فهذا لا يعني أن  $r = 1$  . إننا نضرب الطول  $1$  في  $r$  . إذا لم يتغير طول  $1$  فهذا يعني أن  $r = 1$  ) . وحيث إن الزاوية  $\frac{\pi}{2}$  تساوي  $90^\circ$  فمن السهل أن نرى أن العددين  $1$  ،  $b$  يجب أن يكونا  $70.7^\circ$  ،  $70.7^\circ$  ( من جدول الجيوب وجيوب التمام ) وتكون العملية  $1 + b$  التي تمثل دوران

مقداره  $45^\circ$  هي  $70.7 + 70.7$ ، ت (هذه عملية تقريبية فقط .  
ارسم الشكل بنفسك وتحقق من النتيجة بالحساب العادي معتبراً  
ت وكأنها أى عدد طبعى ) .

### الأعداد المركبة والكهربائيون

إنه من السهل الآن أن نرى السبب الذى من أجله يستعمل  
الكهربائيون المؤثر ت هذا الاستعمال الكثير . يحتوى كل  
مولد كهربائى على أجزاء تدور فى كل دقيقة بعدد كبير من الزوايا  
القائمة — أى تطبق العملية ت عليها مرات عديدة .



( شكل ٢٧ )

سوف يكون من الممكن والمفيد لطلبة الكهرباء أن نوضح  
ت كلية بواسطة مولد بسيط للتيار المتغير . وللسهولة يكون من



المستحسن أن نعتبر تصميم المولد مختلفاً تماماً عن ذلك الذى يستعمل حقيقة فى الأعمال الهندسية .

نفترض دوران ملف صغير فى مجال مغناطيسى . فىمكن تمثيل اتجاه المجال المغناطيسى بواسطة سهم ، وقوة المجال المغناطيسى بطول هذا السهم . فى شكل ٢٧ ، يمثل السهم ١ المجال المغناطيسى يحل السهم و ١ محل الخط ١ ( الذى كان يصل النقطة الثابتة بالخرزة ١ ) . يعنى دوران و ١ تغير اتجاه المجال المغناطيسى . وتعنى إطلاله و ١ زيادة قوة المجال . يمكن إجراء كلتا العمليتين بسهولة إذا أمكن توليد المجال المغناطيسى بوسائل كهربائية .

يمكننا إتخاذ وضعاً قياسياً عند ما يكون التيار الذى يسرى فى المغناطيسات الكهربائية عند ف ، ه مقداره أمبير واحد . تعنى العملية ١ أن التيار فى المغناطيس الكهربائى قد زاد حتى أصبح المجال المغناطيسى عند المركز نترك مسافة قبل وبعد و أقوى ١ من المرات عما سبق .

سوف تعنى العملية ب ت أننا بدأنا من الوضع القاسى وضاعفنا قوة المجال القياسية ب من المرات ثم صنعنا دورانا بمقدر زاوية قائمة . تكون حينئذ الملفات فى المواضع الميمنة بخطوط متقطعة عند ح ، ز ويكون المجال المغناطيسى ممثلاً بالسهم المتقطع . يمكن تفسير العملية ١ + ب ت وذلك بإدماج العمليتين .

الديناملفان عنده ، ف يسرى فيهما تيار كاف لتوليد مجال مغناطيسى  
مقداره ١ من الوحدات عند و فى نفس الوقت لدينا ملفان عند  
ح ، ز يمر بهما تيار كاف لتوليد مجال مقداره ب من الوحدات عند  
المركز . سوف يولد التأثير المزدوج مجالاً مغناطيسياً فى اتجاه يقع بين  
الاتجاهين و ف ، و ح . كما سبق يتعين الوضع الصحيح للسهم  
الممثل للتأثير المزدوج تماماً بنفس قاعدة الجمع على استقامة  
واحدة ، التى تعرف عادة بقاعدة متوازي الأضلاع أو  
مثلث القوى .

وسوف يكون من الواضح للكهربائيين أنه يمكن توجيه  
السهم الممثل للمجال المغناطيسى لآى اتجاه مرغوب فيه باختيار  
مناسب لمقدار ( واتجاه ) التيارات فى الدائرتين ه - ف ،  
ح - ز . أى أنه إذا تكونت أية عملية من ، دوران وزيادة  
فى الطول فانه يمكن وضعها فى الصورة أ + ب ت .

ولتجنب التعقيد لم نرسم الملف الصغير الذى يدور حول و .  
وبالطبع سوف تنتج أية تغيرات فى قوة أو اتجاه المجال المغناطيسى  
تغيرات مناظرة فى الطول وسعة التيار المتردد المتولد . ومن  
الطبعى أن يستعمل المؤثرات مرتبطة مع التيارات المترددة لبيان  
التغيرات الناتجة من المقاومات الإضافية ، الحث . . . الخ .

باستعمال الرموز يمكننا أن نقارن تأثير التغيرات التى

تحدث داخل الدائرة مع تأثير تغيرات معينة (ممثلة برموز مثل  
+ ب ت) تجرى في داخل المولد الذي ينتج التيار .

### الدراسات التالية المرص ت

قد أثير في هذا الفصل سؤال واحد ولم يحجب عليه بعد ، وهو  
كيفية تعريف ه س عندما تكون س عددا مركبا . ه س ،  
في خط بارز هي رمز العملية جديدة ويمكننا ( إذا شئنا ) إلحاقه  
بأية عملية مهما كانت . ولكن هذا سوف يكون مضللا للغاية .  
إذ يجب علينا دائما أن نتذكر أن العملية التي وقع الاختيار عليها  
ليس لها أدنى علاقة مع ه س العادية ، وربما نكون دائما معرضين  
للوقوع في خطأ بنسيان هذا الفرق . لذلك يكون من المستحسن  
ألا نستعمل ه س بالمرّة مالم نجد عملية أخرى لها خواص كثيرة  
الشبهة بخواص ه س .

لقد وجدنا قبلا عمليات رمز لها بالمؤثرات س ، س<sup>٢</sup> ، س<sup>٣</sup> .  
إلخ ونحن نعلم أنه يمكن التعبير عن ه س بواسطة متسلسلة تحوى  
قوى س المختلفة . لذلك كان من الطبيعى أن تكون المتسلسلة  
المناظرة بحروف بارزة وان نعرف ه س كالآتى :

$$ه س = ١ + \frac{١}{٢} س^٢ + \frac{١}{٢} س^٢ + \frac{١}{٢} س^٢ + \frac{١}{٢} س^٢ + \dots$$

وفي الحقيقة أن هذا التعريف يكفي جداً لتوضيح معنى ه<sup>س</sup> التي يمكن أن نبرهن بها جميع خواص ه<sup>س</sup> العادية .  
 إنه من المهم أن نفهم مضمون هذا التعريف . فمثلاً إذا رغبنا في إيجاد ه<sup>٢+٣</sup> بواسطة هذه المتسلسلة علينا أن نضع  
 ٢ + ٣ ت بدلا من س فنحصل على :

ه<sup>٢+٣</sup> = ١ + (٢ + ٣ ت) +  $\frac{1}{4}$  (٢ + ٣ ت)<sup>٢</sup> +  $\frac{1}{4}$  (٢ + ٣ ت)<sup>٣</sup> + ..... إلخ وعلينا حينئذ أن نحسب  
 (٢ + ٣ ت)<sup>٢</sup> ، (٢ + ٣ ت)<sup>٣</sup> . إلخ ونضع بدلا منها ما يساويها (٢ + ٣ ت)<sup>٢</sup> تساوى ٥ + ١٢ ت ،  
 (٢ + ٣ ت)<sup>٣</sup> هى ٨ + ٤٦ ت + ٩ ت<sup>٢</sup> وهكذا إذا أخذنا في الاعتبار الأعداد  $\frac{1}{4}$  ،  $\frac{1}{8}$  . إلخ الذى تظهر في المتسلسلة فإننا  
 نحصل على :

ه<sup>٢+٣</sup> = ١ + (٢ + ٣ ت) + (-٢  $\frac{1}{4}$  + ٦ ت) + (-٧  $\frac{1}{8}$  + ١٢ ت + ٩ ت<sup>٢</sup>) + .....  
 والآن يمكننا أن نجتمع هذه الحدود التي تحتوى ت وتلك الخالية من ت بحيث تكون :

$$\begin{aligned} \text{ه}^{٢+٣} &= ١ - ٢ + ٢\frac{1}{4} - ٧\frac{1}{8} + \dots \\ &+ ت(٣ + ٦ - ١٢ + \dots) \end{aligned}$$

يمكن تبرير هذه الخطوة لأنه يمكن معاملة  $t$  تماماً كمعاملة  
 $m$  في الجبر العادي كما ذكرنا سابقاً .

ولكن هذه النتيجة سوف تكون بدون جدوى ما لم تتحول كل من المتسلسلتين  $1 + 2 - 2\frac{1}{2} - 7\frac{2}{3} \dots$  إلى نهاية محدودة عند ما تأخذ عدداً كافياً من الحدود وأيضاً سوف تكون هذه المتسلسلات بدون أدنى فائدة إذا اتضح أنها متسلسلات خطيرة من النوع الذى شرح فى الباب الرابع عشر .

في الحقيقة إن هاتين المتسلسلتين معلومتان ويمكن الاعتماد عليهما . تحتوى الحدود الأخيرة في متسلسلة هـ على أعداد مثل  $\frac{1}{12}$  ،  $\frac{1}{14}$  ،  $\frac{1}{17}$  التي تصغر بسرعة كبيرة ، وعند درجة معينة لا تغير الحدود الأخيرة كثيراً في مجموع المتسلسلة . تتكون الأعداد الموجودة في هـ بالقاعدة الآتية :

١٢. هي ٥ أضعاف ٢، ٧٢٠ هي ٦ أضعاف ١٢٠، وتصغر حدود المتسلسلة بعد ذلك بسرعة كبيرة .

ويمكن البرهنة على أن متسلسلة هـ صحيحة ( باللغة العلمية  
مقاربة ) لجميع قيم س أى أنه إذا كانت  $s = 1 + b$  فإن



قيمة  $a$  ،  $b$  لا تؤثر في تقارب المتسلسلات . فإذا كانت قيمة كل من  $a$  ،  $b$  كبيرة يكون من الضروري أن نأخذ عدداً كبيراً من الحدود قبل أن نحصل على قيمة  $a+b$  ؛ وبالرغم من ذلك فحيث إن المتسلسلة تعرف  $s$  جيداً فلدينا أساس صحيح يمكن الاعتماد عليه .

في الحقيقة لإيجاد  $a+b$  يكون من المستحسن أن نبدأ كالآتي :

$a + a = a = b = b$  ( جتا  $b + t$  جاب ) .  
 $a$  ،  $b$  تناظر الأعداد الطبيعية  $a$  ،  $b$  . يمكن الكشف عن قيمة  $a$  ،  $b$  ، وجتا  $b$  ، وجاب من الجداول . لكن هذه الطريقة تكون ممكنة فقط بعد إثبات (بواسطة متسلسلة  $s$ ) جميع خواص  $s$  . حتى يمكن تبرير جميع الخطوات التي قد اتخذت سابقاً . إذا كان تعريف  $s$  بواسطة هذه المتسلسلة غير دقيق ، فلا يمكن لنا أن نطمئن على النتائج التي حصلنا عليها بهذا التعريف .

لذلك اضطر علماء الرياضيات أن يدرسوا تقارب المتسلسلات التي تظهر فيها الأعداد المركبة . فدرسوا أيضاً المعاني التي يمكن إلحاقها إلى  $\frac{v}{w}$  عندما تكون  $s$  ،  $v$  أعداداً مركبة .

لقد رأينا مثلاً أن استعمال  $T$  يسمح لنا أن نبدي الصلة الوثيقة بين  $هـ س$  ،  $جـ ا س$  ،  $جـ تـ ا س$  ، صلة غير متوقعة إذا أن  $هـ س$  تبدو لأول وهلة أنها مختلفة تماماً عن  $جـ ا س$  ،  $جـ تـ ا س$  . ولقد رأينا أيضاً أن هذه الصلة ذات فائدة عملية إذ أنها تساعدنا على حل مسائل كثيرة مرتبطة بالجيوب وجيوب التمام .

بنفس الطريقة تلقى الدراسات الأخرى للأعداد المركبة ضوءاً على كثير من المسائل المرتبطة بالأعداد الطبيعية . في الحقيقة أن موضوع الأعداد المركبة هو أحد المواضيع اللطيفة والمفيدة في الرياضيات . إنه يعطى الفرد الشعور بأنه قد أخذ إلى ما وراء الكواليس : بحيث يستطيع الفرد أن يرى بسهولة وبسرعة الأسباب التي أدت للنتائج التي كانت تبدو قبلاً أنها مجرد صدفة . إنه موضوع يلعب فيه الحساب دوراً صغيراً : كثيراً ما تأخذ نتائج صوراً يمكن للفرد أن يراها ويتذكرها كما يتذكر إعلاناً أخذاً . ولأنه يمكن للفرد من رؤية الأهمية الخفية لكثير من المسائل العملية لذلك كان ذا فائدة عظيمة لعلماء الرياضة التطبيقية .

لا يمكن لأحد أن يتنبأ أن دراسة  $T$  سوف توصل إلى نتائج مبشرة كهذه . تماماً كما لم يتمكن الرجال الأولون الذين كان لديهم المغناطيسات والحديد أن يتنبأوا بتطبيقات نظرية

الكهر ومغناطيسية التي أدت إلى اختراع اللاسلكى . هذا ما حدث فعلا فى كلنا الحالين .

عندما نتعلم فى البداية كيفية استعمال ت سوف نحس بشعور غريب . وسوف يبدو لك أن الموضوع خيالى . هذا لا يمكن مفادانه إذ أن أى موضوع جديد يبدو غريباً لأول مرة . عندما أصبح المذياع شعبياً شعر الناس بأنه شىء غريب . ولكن الأطفال فى هذه الأيام يعتبرون المذياع وكأنه شىء عادى — فاذا كنا مثلاً فى حالة حرب ومن باب الاقتصاد أوقفت جميع أجهزة اللاسلكى سوف يشعر الناس بأن عدم وجود المذياع شىء غريب . ولكن لم يكن لدى أحد مذياع عام ١٩١٤ — ١٩١٨ ولم يشعر أحد أن هذا غريباً . لا يوجد شىء لا بالغريب أو بالمألوف فى ذاته . أى شىء يكون غريباً عندما تقابله لأول مرة : أى شىء يكون مألوفاً إذا عرفته لمدة طويلة . وكلما استعملت اقتربت من الشعور بأن ت شىء طبيعى معقول . ولكن هذا الشعور يأتى فقط بالتدريج .

تظهر الأعداد المركبة الرياضة البحتة فى أحسن صورة . والرياضة البحتة هى دراسة طريقة . فاذا كان لدينا أية مسألة فإننا نريد معرفة أحسن الوسائل لطرقها . تبدو مسائل كثيرة أنها صعبة

لأول وهلة ثم تصبح بسيطة فقط إذا نظر الفرد إليها من الزاوية المناسبة وتمكن من فحصها وهى فى الوضع المناسب .

إنها مهمة علماء الرياضة البحتة أن يميزوا بين المسائل وأن يقترحوا أن هذه المسألة فى جوهرها مشابهة لتلك ، وإذا يكون من المحتمل محاولتها بطريقة خاصة . ربما يكون ارتباط المسائل ببعضها غير واضح .

فليس من الواضح بالمرّة أن تلقى المعادلة  $s^2 = -1$  ضوءاً على مسألة الإضاءة الكهربائية . كلما قل وضوح الارتباط زاد الفضل لعلماء الرياضة البحتة فى اكتشافه ، وكلما بدأت المسألة صعبة زاد الفضل عند توضيح ارتباطها بمسألة أخرى أبسط منها .

لا يحتاج المهندسون لمعرفة أكثر من النتائج الأولية جداً عن الأعداد المركبة . إن النتائج الأكثر تعمقاً لهى فى غاية الأهمية لعلماء الرياضة المتخصصين الذين يخترعون ويكملون الطرق الجديدة التى عندما تنتهى يمكن أن يستعملها العلماء والرجال العلميين . يجب على أى فرد له ذوق الرياضيات أن يحاول وهو صغير السن على قدر الإمكان أن يكتسب بعض المعلومات عن نظرية الأعداد المركبة . تحمل الكتب التى تعالج هذا الموضوع عناوين مثل " نظرية المتغيرات المركبة " ، " نظرية الدوال الخ . يعجز التلاميذ

مراراً كثيرة في المدارس أن يتبينوا أن هناك رياضيات كثيرة يمكن معرفتها ، ويجد التلاميذ الموهوبون أنفسهم متفوقون على زملائهم فيظنون أنهم قد تمكنوا من الرياضيات . ونتيجة لذلك تجدهم لا يستفيدون بأى شئ في عامهم الدراسي الأخير . ذلك لأنهم في عامهم الأول بالجامعة ( لهؤلاء الذين يتمكنوا من الالتحاق بها فعلاً ) يقابلون أحسن التلاميذ الوافدين من المدارس الأخرى ، وحينئذ تواجههم صدمة هائلة .

مجلة  
الابتناسا





# فهرس

## الجزء الأول : الطريق إلى الرياضيات

٦	الباب الأول : الفزع من الرياضيات ... ..
١٣	الباب الثاني : الهندسة علم الأثاث والجدران ... ..
٣٤	الباب الثالث : طبيعة التدليل
٦٨	الباب الرابع : رسم خطة الدراسة ... ..
	الجزء الثاني : في أجزاء معينة من الرياضة
٩٦	الباب الخامس : الحساب ... ..
١٢٣	الباب السادس : كيف ننسى جدول الضرب ... ..
١٤١	الباب السابع : الجبر - اختزال الرياضة ... ..
١٥٧	الباب الثامن : طرق الإكثار ... ..
١٩٠	الباب التاسع : الأشكال البيانية أو التفكير بالصور
٢١٧	الباب العاشر : حساب التفاضل - دراسة السرعة
٢٥٣	الباب الحادى عشر : من السرعة إلى المنحنيات ... ..
٢٩٨	الباب الثانى عشر : مسائل أخرى على حساب التفاضل
٣١٨	الباب الثالث عشر : حساب المثلثات
٣٦١	الباب الرابع عشر : الأساس ... ..
٣٩٠	الباب الخامس عشر : الجذر التربيعى لناقص واحد





## دار سعد مضر للطباعة والنشر

### أصدرت من مشروع المؤلف كتاب

- ١ - الحاج مراد
- ٢ - العلم يعيد بناء العالم
- ٣ - مدخل إلى علم الآثار
- ٤ - طبقات المجتمع
- ٥ - قصة التجارة الدولية
- ٦ - الصحافة في العالم
- ٧ - مناطق الهجرة في العالم
- ٨ - علم الاجتماع
- ٩ - الاستعمار الحديث
- ١٠ - رواد الطب
- ١١ - الكيمياء الحديثة
- ١٢ - اقتصاديات الزراعة
- ١٣ - كولومبيا
- ١٤ - ناس من دبلن
- ١٥ - الرومانتيكية
- ١٦ - حياة النبات
- ١٧ - قصص من أندريه مورو
- ١٨ - الإشعاع الذري والحياة
- ١٩ - متعة الرياضى



GREAT IS OUR GOD

حصريات مجلة الابتسامه

WWW.IBTESAMA.COM

